



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2  
BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI KAR  
REPÜLŐGÉPEK ÉS HAJÓK TANSZÉK

# HŐ- ÉS ÁRAMLÁSTAN I. (HŐTAN-I)

*DR. SÁNTA IMRE*

*Budapest, 2011*

# HÓTAN-I.

# Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék.....	i
A hőtán tárgya és felosztása.....	1
Termodinamika I.....	1
<b>1. A termodinamikai rendszer .....</b>	<b>1</b>
1.1. <i>Kölcsönhatások .....</i>	3
1.2. <i>Állapotjelzők.....</i>	4
1.2.1. <i>Az állapotjelző matematikai értelmezése.....</i>	4
1.2.2. <i>Az állapotjelzők típusai .....</i>	6
<b>2. A kinetikai gázelmélet alapjai.....</b>	<b>7</b>
2.1. <i>Előzmények, hipotézisek, a Brown-féle mozgás.....</i>	7
2.2. <i>Az ideális gáz.....</i>	8
2.3. <i>A nyomás kinetikai értelmezése .....</i>	9
2.4. <i>A hőmérséklet kinetikai értelmezése.....</i>	15
2.5. <i>A sűrűség értelmezése .....</i>	19
2.6. <i>Avogadro törvénye .....</i>	20
<b>3. Az általános gáztörvény (Az ideális gáz állapotegyenlete).....</b>	<b>23</b>
<b>4. Valóságos gázok állapotegyenletei.....</b>	<b>28</b>
4.1. <i>Kompresszibilitási tényező alak.....</i>	31
4.2. <i>Viriál egyenletek.....</i>	32
4.3. <i>Van der Waals egyenlete .....</i>	32
4.3.1. <i>Térfogati korrekció .....</i>	32
4.3.2. <i>Nyomáskorrekció.....</i>	34
4.3.3. <i>A van der Waals-egyenlet gyökeinek elemzése.....</i>	38
<b>5. A belső energia kinetikai értelmezése.....</b>	<b>40</b>
5.1. <i>Az ideális gáz molekuláinak közepes kinetikai energiája .....</i>	40
5.2. <i>Az ideális gáz belső energiája .....</i>	40
<b>6. Hőmennyiség, hőkapacitás, fajhő .....</b>	<b>44</b>
6.1. <i>A fajhők típusai a vonatkoztatási anyagmennyiség egysége szerint .....</i>	44
6.2. <i>A fajhők átszámítása.....</i>	45
6.3. <i>Fajhők a hőközlési folyamat sajátossága szerint.....</i>	45
6.4. <i>Valódi és közepes fajhő .....</i>	46
6.5. <i>A fajhő fizikai tartalma.....</i>	49
6.5.1. <i>Az ideális gáz fajhője .....</i>	49
6.5.2. <i>Valóságos gázok fajhője.....</i>	50

<b>7.</b>	<b>A termodinamika első főtétele.....</b>	<b>59</b>
7.1.	<i>Zárt rendszer</i> .....	59
7.1.1.	<i>Zárt rendszer munkája</i> .....	59
7.1.2.	<i>Belső energia</i> .....	60
7.2.	<i>Nyitott rendszer</i> .....	62
7.2.1.	<i>A nyitott rendszer munkája</i> .....	62
7.2.2.	<i>Torlóponti entalpia, statikus entalpia</i> .....	64
7.3.	<i>Az entrópia</i> .....	71
7.3.1.	<i>T - s diagram</i> .....	74
<b>8.</b>	<b>Gázkeverékek .....</b>	<b>76</b>
8.1.	<i>A gázkeverék összetételének megadási módjai</i> .....	76
8.2.	<i>Dalton törvénye, az alkotók parciális nyomása</i> .....	78
8.3.	<i>A gázkeverék gázállandója</i> .....	79
8.4.	<i>Gázkeverék látszólagos (átlagos) molekulatömege</i> .....	80
8.5.	<i>Gázkeverék fajhői</i> .....	81
8.6.	<i>A gázkeverék belső energiája és entalpiája</i> .....	82
8.7.	<i>Ideális gázok adiabatikus keveredése</i> .....	83
8.7.1.	<i>Keveredés zárt rendszerben</i> .....	83
8.7.2.	<i>Keveredés nyitott rendszerben</i> .....	84
8.8.	<i>Entrópiaváltozás a keveredés során</i> .....	85
<b>9.</b>	<b>Nevezetes ideális gázfolyamatok .....</b>	<b>90</b>
9.1.	<i>Izochor (<math>v = \text{állandó}</math>) folyamat</i> .....	90
9.2.	<i>Izobár (<math>p = \text{állandó}</math>) folyamat</i> .....	92
9.3.	<i>Izotermikus (<math>T = \text{állandó}</math>) folyamat</i> .....	94
9.4.	<i>Ideális adiabatikus folyamat (<math>q_{1,2}, \delta q = 0</math>)</i> .....	96
9.5.	<i>Politrópikus folyamat (<math>c_n = \text{állandó}</math>)</i> .....	99
9.6.	<i>Politrópikus folyamatok és munkáik ábrázolása</i> .....	107
9.6.1.	<i>Politrópikus folyamatok ábrázolása p - v és T - s diagramban</i> .....	107
9.6.2.	<i>Belsőenergia- és entalpiaváltozás ábrázolása T-s diagramban</i> .....	108
9.6.3.	<i>Munkák ábrázolása T - s diagramban</i> .....	110
<b>10.</b>	<b>Speciális feladatok az I. főtétel témaköréből.....</b>	<b>113</b>
10.1.	<i>Nem politrópikus folyamatok</i> .....	113
10.2.	<i>Jendrassik-indítás elve</i> .....	116
10.3.	<i>Változó tömegű rendszerek</i> .....	120
10.3.1.	<i>A kiáramlás állandó hőmérsékletű tartályból</i> .....	120
10.3.2.	<i>A kiáramlás során a tartályban lévő gáz nyomása állandó marad</i> ....	122
10.3.3.	<i>A kiáramlás során a tartályban lévő gáz politrópikus (<math>n = \text{állandó}</math>) állapotváltozást szenved</i> .....	124
10.4.	<i>Nem egyensúlyi adiabatikus folyamat</i> .....	126
10.5.	<i>Gázoszlop lengése (légrugó)</i> .....	128
<b>11.</b>	<b>A termodinamika második főtétele .....</b>	<b>131</b>
11.1.	<i>A második főtétel jelentősége</i> .....	131

11.2.	<i>Reverzibilis és irreverzibilis folyamatok.....</i>	132
11.3.	<i>A hő folyamatos (ciklikus) munkává alakításának feltétele.....</i>	137
11.4.	<i>A körfolyamatok gazdaságosságának megítélése.....</i>	140
11.5.	<i>A termodinamika második főtételének megfogalmazásai.....</i>	142
<b>Irodalomjegyzék.....</b>		<b>144</b>
<b>Ábrajegyzék.....</b>		<b>146</b>



# A hőtan tárgya és felosztása

E jegyzet hőtan része a fizika hőtan fejezetének a műszaki gyakorlatban való alkalmazása.

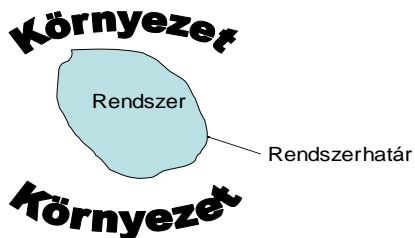
**Tárgya** a szilárd, folyékony és gáz halmazállapotú testek melegedése és lehűlése, valamint a közben lejátszódó energiacserekek, folyamatok vizsgálata.

Fő fejezetei:

- Termodinamika – a gázok jellemzőinek azokat a változásait vizsgálja, melyek a hőközlés, térfogatváltozás, áramlás során keletkeznek. Kapcsolatot teremt a termikus (hő), mechanikai és kémiai folyamatok között. Bázisa két alaptörvény: a termodinamika első és második főtétele. (Ezen kívül a nulladik és harmadik főtételek említhetők meg. A harmadik főtétel csak a kémiai termodinamikában használatos).
- Hőközlés – két rendszer (test) közötti termikus kölcsönhatás. Formái: vezetés, hőátadás, hőátbocsátás és sugárzás, valamint ezek kombinációja az összetett hőátvitel.

## Termodinamika I

### 1. A termodinamikai rendszer



1.1. ábra – A rendszer és környezete

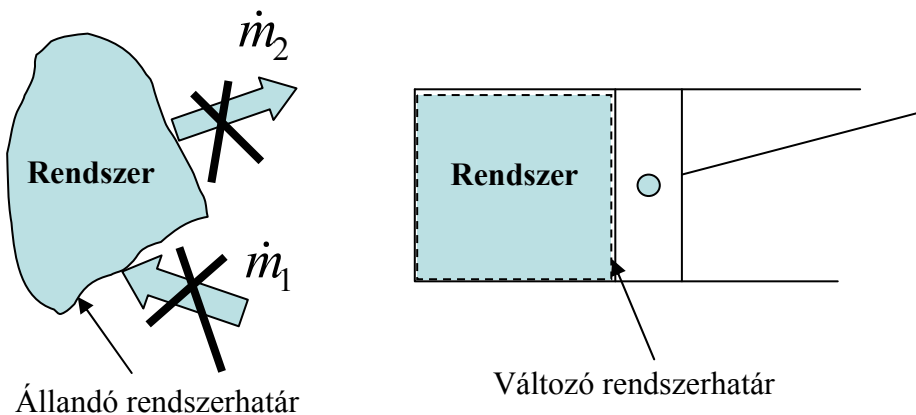
A termodinamikában a vizsgálat tárgya a rendszer. A rendszeren kívül eső testek és közegek alkotják a rendszer környezetét. A rendszer és környezete között húzódik a rendszerhatár (1.1. ábra). A rendszerhatár a vizsgálat tárgyától függően lehet valós és képzeletbeli (melyet bizonyos esetekben ellenőrző felületnek

nevezünk), továbbá lehet állandó és időben változó (1.2. ábra).

A rendszereket különböző szempontok szerint csoportosíthatjuk.

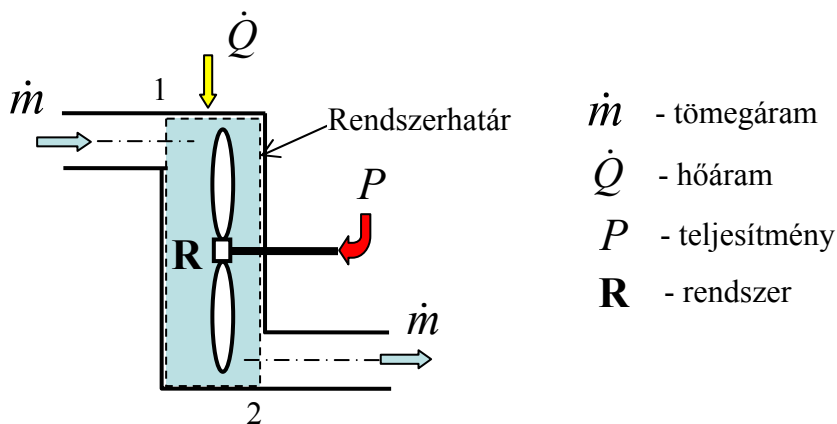
*A rendszer és környezete közötti közegcsere alapján lehetnek:*

- zárt rendszer – a rendszer és környezete között nincs közegcsere (1.2. ábra),



**1.2. ábra - Zárt rendszer**

- nyitott rendszer – a rendszer és környezete között közegcsere van (1.3. ábra).



**1.3. ábra - Nyitott rendszer**

*A rendszer és környezete közötti energetikai kölcsönhatás (a továbbiakban kölcsönhatás) szerint a rendszer lehet:*



- szigetelt (energiacsere a rendszer és környezete között nincs),
- szigeteletlen (energiacsere a rendszer és környezete között van),
- részlegesen szigetelt (az energiacsere valamilyen formában korlátozott). Pl. hőszigetelt (adiabatikus) rendszer – a hőcsere a rendszer és környezete között kizárva. A merev határokkal rendelkező állandó térfogatú rendszer esetében a rendszer és környezete között a nem lehetséges munkavégzés.

*Összetétel (szerkezet) szerint a rendszerek lehetnek:*

- homogén (mind összetétel, mind fizikai felépítés szerint egynemű, a rendszeren belül nincs elhatároló felület),
- heterogén (néhány egynemű, különböző fizikai tulajdonsággal rendelkező részből áll)

*Állapot szerint a rendszer lehet:*

- Egyensúlyi (a rendszeren belül makroszkopikus energiaátadás nincs).

A rendszer egyensúlyi állapota lehet

- termikus (a hőmérséklet mindenütt azonos),
- mechanikai (a nyomás mindenütt azonos),
- kémiai (a rendszerben nem játszódik kémiai reakció).

Amennyiben mindhárom feltétel teljesül termodinamikai egyensúlyról beszélünk.

- Nem egyensúlyi (a felsorolt feltételek valamelyike nem teljesül).

## 1.1. Kölcsönhatások

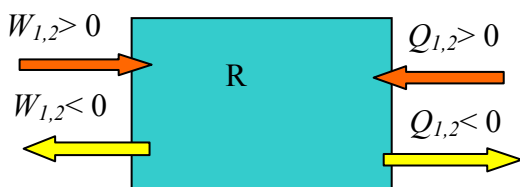
A termodinamikai rendszer és környezete között a gyakorlatban *kétféle kölcsönhatást* (energiacsere a rendszer és környezete között) különböztetünk meg:

- munkavégzés (mechanikai munka) – az anyag rendezett, szervezett mozgásának átadása,
- hőközlés - a rendszer és környezete közötti termikus kölcsönhatás, a rendezetlen részecskemozgás energiájának átszármaztatási módja – hőcsere a rendszer és környezete között.

Amennyiben a rendszer és környezete között kölcsönhatás lép fel, a rendszer állapota megváltozik. *A rendszer állapotának megváltozása a termodinamikai (termikus) folyamat.*

*A folyamatot megvalósító állapotok szerint a folyamatok lehetnek:*

- egyensúlyi (egyensúlyi állapotokon keresztül lejátszódó) folyamat,
- nem egyensúlyi folyamat (a valóságos folyamatok nem egyensúlyiak). Kompromisszum az u.n. kvázisztatikus folyamat mely a végtelen kis sebesség helyett véges, de igen kis sebességgel – az egyensúlyi állapottól igen csekély eltéréssel – lejátszódó folyamat.



**1.4. ábra - Hőmennyiség és a munka előjele**

A kölcsönhatás során átszármasztott energia (hő, munka) előjele az energiaáramlás irányától függ. Tantárgyunkban, ha a hő a rendszerbe bevezetésre kerül – *pozitív*, ellenkező esetben *negatív* előjelűnek tekintjük. Hasonlóan pozitív az a munka, amelyet a környezet

végez a rendszeren és negatív, ha a rendszer végzi a környezetén (1.4. ábra). Amennyiben ezt az előjelszabályt betartjuk, a továbbiakban levezetésre kerülő termodinamikai egyenleteink előjelhelyesen szolgáltatják e mennyiségek értékeit.

## 1.2. Állapotjelzők

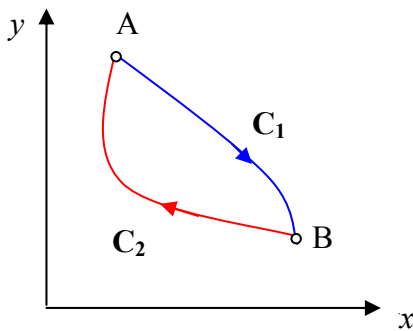
A rendszer állapotát egyértelműen meghatározó fizikai paraméterek az állapotjelzők. Egy jellemző mennyiség akkor állapotjelző, ha véges változása a folyamat útjától függetlenül csak a kezdeti és végállapottól függ. Annak, hogy egy jellemző ennek a követelménynek eleget tegyen, matematikai feltétele van. A továbbiakban ezt a matematikai feltételt határozzuk meg, valamint az állapotjelzők típusait foglaljuk össze.

### 1.2.1. Az állapotjelző matematikai értelmezése

Az állapotjelző matematikai értelmezéséhez elevenítsük fel a matematikában a vonalintegrálról tanultakat. Az

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (1.1)$$

kifejezés vonalintegrálja a  $C_1$  görbe (1.5. ábra) mentén



1.5. ábra - Vonalintegrál két görbe mentén

$$\int_A^B M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (1.2)$$

(C<sub>1</sub>)

Ahol a görbe  
 $x = x(t), \quad dx = x'(t)dt,$   
 $y = y(t), \quad dy = y'(t)dt.$  (1.3)  
 paraméteres alakban adott.  
 Az integrálás határai  $t_A$ -ra, illetve  $t_B$ -re módosulnak.

Az integrál értékét a (1.3) kifejezések helyettesítésével határozhatjuk meg:

$$\int_{t_A}^{t_B} \{M[x(t), y(t)]x'(t) + N[x(t), y(t)]y'(t)\}dt. \quad (1.4)$$

A teljes differenciál vonalintegrálja A és B pontok között a C<sub>1</sub> görbe mentén

$$\int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A, \quad (1.5)$$

vagyis értéke csak a kezdeti és végponttól függ, vagyis független a görbék menetétől.

A  $\varphi(x, y)$  függvény teljes differenciálja

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \quad (1.6)$$

alakú kifejezés.

A teljes differenciál sajátossága, hogy a  $dx$  együtthatójának  $y$  szerinti deriváltja megegyezik a  $dy$  együtthatójának  $x$  szerinti deriváltjával. Az (1.1) kifejezés akkor teljes differenciál, ha teljesül a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (1.7)$$

feltétel.

Az (1.5) egyenletből következőleg a teljes differenciál vonalintegrálja az A és B végpontok között független attól, hogy milyen görbe mentén vesszük.

Amennyiben meghatározzuk  $\varphi$  függvény teljes differenciáljának integrálját a B és A végpontok között ( $C_2$  görbe), kapjuk

$$\int_B^A d\varphi = \varphi_A - \varphi_B . \quad (1.8)$$

A  $C_1$  és  $C_2$  görbék által alkotott zárt görbe menti integrál így

$$\oint d\varphi = \int_A^B d\varphi + \int_B^A d\varphi = 0 . \quad (1.9)$$

Vagyis a teljes differenciál körintegrálja zérus.

Az állapotjelző értéke csak a rendszer állapotától függ és független az állapothoz vezető folyamattól. (Itt van az analógia az állapotjelző változása és vonalintegrál között).

Ebből, illetve a fentiekből következik, hogy *amennyiben egy paraméter elemi változása teljes differenciál, akkor ez a paraméter állapotjelző*. Ez a körülmény az állapotjelző *matematikai feltétele*.

### 1.2.2. Az állapotjelzők típusai

Amennyiben az állapotjelző értéke független a rendszerben foglalt anyagmennyiségtől – vagyis értéke a rendszer minden részében azonos – *intenzív* állapotjelzőkről beszélünk (pl. nyomás, hőmérséklet).

Az anyagmennyiségtől függő állapotjelzők az *extenzív* állapotjelzők (pl. térfogat, tömeg, belső energia, entalpia, entrópia).

A termodinamikában a rendszer állapotának jellemzésére a fajtérfogatot, nyomást és a hőmérsékletet használjuk, ezért ezeket *termikus* állapotjelzőknek nevezzük.

Az állapotjelzők másik csoportja a *kalorikus* állapotjelzők csoportja (pl. belső energia, entalpia, entrópia).



rendszeretlenül a legnagyobb összevisszaságban mozog a mikroszkóp látómezejében (lásd a 2.1. ábrát).

Természetesen a többi szilárd részecske is hasonló hatást szenved el és kvalitatíve hasonló mozgást végez. A részecske méreteit növelve, mozgása mindinkább csökken, majd megszűnik. A nagyobb méretű részecskével ütköző sokkal több molekula hatása statisztikusan kiegyenlíti egymást, másrészt a részecske nagyobb tömege révén egy nekiütköző molekula hatására csak nagyon kicsit mozdul el.

A részecskéknek ezt a rendezetlen mozgását nevezzük Brown-féle mozgásnak, amely nem azonos a molekulák kaotikus hőmozgásával, hanem annak méreteiben nagyított, tempójában lassított képe.

A mikroszkóp alatti megfigyelés szerint a folyadék hőmérsékletének emelkedésével a Brown-féle mozgás intenzívebbé válik, amelyből az a fontos következtetés vonható le, hogy a molekulák átlagos sebessége a hőmérséklet emelkedésével növekszik

A makroszkopikus anyag molekuláris felépítésének elmélete a XIX. század második felében főként Clausius, Maxwell és Boltzmann munkássága nyomán indult erős fejlődésnek. Tevékenységük adta meg a kinetikai gázelméletnek az alapokat. Minthogy ebben az időben a modern elméleti mechanika még nem jelent meg, a kinetikai gázelmélet a klasszikus newtoni mechanika tételeit használta fel.

Nem véletlen, hogy a kinetikai elmélet eredményei a gázhalmazállapotú anyaghoz kötődnek, ugyanis a gázoknál jelentik a valóság legjobb megközelítését azok a hipotézisek, amelyek segítségével a klasszikus mechanika egyáltalán alkalmazható volt a molekuláris mozgás modellezésére. A kinetikai gázelmélet sikerei az idealizált modell mellett elsősorban annak köszönhetők, hogy a newtoni mechanika általános elveit statisztikusan érvényre jutó valószínűségi elvekként fogta fel.

A továbbiakban a kinetikai gázelmélet által feltételezett anyagmodellt és annak viselkedésmódját ismerjük meg. Ez a modell az ideális gáz.

## **2.2. Az ideális gáz**

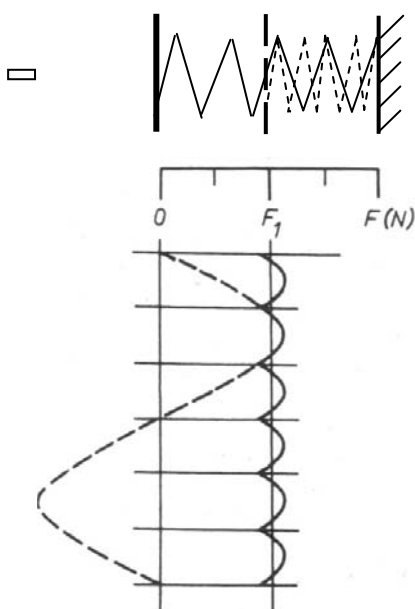
A valóságos gázok molekulái közötti eredő erőhatás aszimptotikus menetéből (4.2. ábra) arra következtethetünk, hogy az anyag a molekulák közti közepes távolság növekedésével egyre jobban közelít egy olyan

állapothoz, amelyben a molekulák között sem vonzó, sem taszító erők nem ébrednek, s így a mikroszkopikus mozgás kinetikai energiája mellett a kölcsönhatás potenciális energiája elvi szigorúsággal elenyészik. Ezt az állapotot *ideális gázállapotnak* nevezzük. Ez olyan határállapot, amelyhez végtelen ritkítás esetén minden valóságos gáz közelít. Nyilvánvaló, hogy ilyen körülmények között a molekulák saját térfogata a gáz által betöltött térhez képest elhanyagolhatóvá válik.

Az ideális gáz esetében a molekulákat kiterjedés nélküli tömegpontokként kezeljük, amelyek csak mozgási energiával rendelkeznek és energiájukat ütközések sorozatán adják át egymásnak. Az ideális gáz tehát egy anyagmodell, amely a valóságban nem fordul elő (mint ahogyan a kontinuum, a merev test és az inkompresszibilis közeg sem). A valóságos gázok annál inkább hasonlóak viselkedésükben az ideális gázhoz, minél távolabb vannak a cseppfolyósodás állapotától, vagyis minél ritkábbak és hőmérsékletük minél nagyobb.

Amennyiben a kinetikai gázelmélet anyagmodellként az ideális gázt használja, annyiban eredményeit közelítésnek kell tekintenünk. De a bevezetőben mondottak szerint e közelítés kielégítő lesz számunkra.

### 2.3. A nyomás kinetikai értelmezése



2.2. ábra - A lövedék becsapódásának hatása a céltáblára

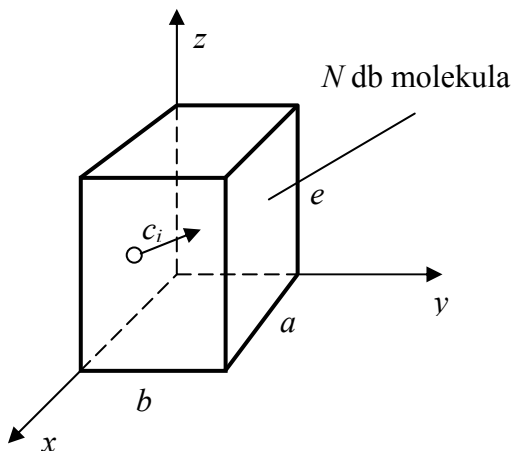
Makroszkopikus szóhasználattal nyomáson az egységnyi felületre ható merőleges erőt értjük. A kinetikai gázelmélet szerint a nyomás a molekuláknak a gáztömeget határoló edény falához való ütközéséből eredő mechanikai hatások statisztikai átlaga egységnyi felületre vonatkoztatva. Dimenziója: erő per felület.

A rendezetlen (kaotikus) mozgás során a molekulák az edény falának ütközve, arra ugyanolyan hatást fejtenek ki, amelyet a céltáblára rugalmasan becsapódó és onnan rugalmasan visszapattanó lövedékek okoznának.

Vizsgáljuk meg ezt a jelenséget közelebbről. Az elmozdítható céltáblát

támasszuk meg a 2.2. ábrán látható módon rugóval úgy, hogy egyensúlyi helyzetében a skálán 0 ponttal jelzett helyzetben legyen. Egyetlen lövés hatására a tábla kilendül a lövedék sebességétől és tömegétől függő mértékben, majd a 0 pont körül rezgéseket végez. Ha állandóan lövedékek érik a céltáblát, az nem tud 0 helyzetébe visszajutni, hanem egy bizonyos  $F_1$  erőnek megfelelő közepes kitérés körül ingadozik. Ha növeljük a másodpercenként érkező lövedékek számát, és egyidejűleg egy lövedék impulzusát ugyanolyan arányban csökkentjük, az ingadozások egyre kisebbek lesznek ugyanazon közepes érték körül.

Teljesen jogosan beszélhetünk tehát egy, a becsapódó lövedékek okozta állandó erőről, vagy – azt a felületegységre vonatkoztatva – állandó nyomásról.



**2.3. ábra - Az ideális gáz nyomásának meghatározásához kiválasztott rendszer**

Az edény falának ütköző gázmolekulák óriási száma miatt mindez még fokozottabban érvényes a gáz nyomására. Ezek után határozzuk meg a gáz nyomását molekuláris jellemzőkből kiindulva.

A levezetéshez vegyünk egy  $a, b, e$  élméretű derékszögű hasáb alakú edényt, amelyben egyensúlyi állapotú ideális gáz van (2.3. ábra).

Természetesen a levezetés bármilyen alakú edényre, sőt edény nélkül is elvégezhető.

Legyen ebben a  $V = a b e$  térfogatú edényben  $N$  db, egyenként  $m'$  tömegű molekula.

Vizsgáljuk meg az  $i$ -edik molekula mozgását, mely az edény ábra szerinti  $x$  tengelyre merőleges hátsó fala felé tart. A molekula sebessége legyen  $c_x$ . Ez a molekula elérve a falat nekiütközik, majd a rugalmas ütközés törvényei szerint visszapattan. Közben a molekula impulzusa (mozgásmennyisége, lendülete) megváltozik.

(Feltételezzük, hogy egy adott időpillanatban csak egy molekula ütközik a falhoz.)



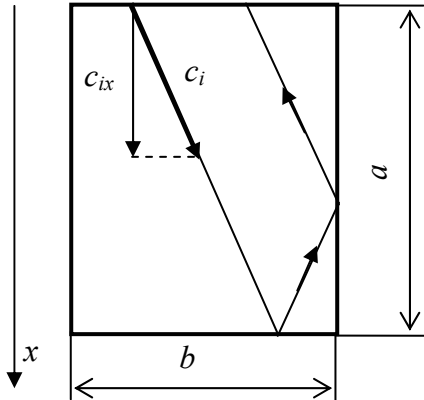
Ez az impulzusváltozás az impulzus tétel értelmében egy a falra ható erőt eredményez, melyet három összetevője alapján határozhatunk meg.

Az impulzus három tengely irányú összetevője:

$$I_{ix} = m' c_{ix}, \quad I_{iy} = m' c_{iy}, \quad I_{iz} = m' c_{iz}. \quad (2.1)$$

Végezzük el a falra ható erő  $x$  tengely irányú összetevőjének meghatározását.

Az impulzus tétel értelmében írható:



$$F_{ix} \Delta t = \Delta I_{ix} = 2 m' c_{ix}, \quad (2.2)$$

minthogy a molekula  $x$  irányú sebesség összetevője  $-c_{ix}$ -ről  $+c_{ix}$ -re változik.

Itt  $\Delta t$  az ütközés (sebességváltozás) időtartamát jelöli.

A nyomást nem ebből a pillanatnyi erőből, hanem átlagos erőhatásból származtatjuk. Ezért határozzuk meg a molekula ugyanazon edényfalba történő két ütközése közötti eltelt idő alatti átlagos erőhatását

**2.4. ábra - Az  $i$ -edik molekula mozgása két ütközés között**

Kövessünk a molekula útját a 2.4. ábra szerint. A molekula eljut a szembeni falhoz, nekiütközik, majd esetleg az oldalfalhoz történő ütközése után visszajut a kiindulási falhoz.

A két ütközés között eltelt idő 
$$\Delta \tau = \frac{2a}{c_{ix}}.$$

Így a két ütközés közötti átlagos erőhatást az

$$\overline{F_{ix}} \Delta \tau = 2 m' c_{ix} \quad (2.3)$$

egyenlet alapján definiálhatjuk, melyből a  $\Delta \tau$  behelyettesítése után megkapjuk az  $i$ -edik molekula által az edény  $x$  tengelyre merőleges falára kifejtett erő  $x$  irányú komponensét:

$$\overline{F_{ix}} = \frac{2 m' c_{ix}}{\Delta \tau} = \frac{m' c_{ix}^2}{a}. \quad (2.4)$$

Az  $N$  db molekula által kifejtett átlagos összes  $x$  irányú erőhatás

$$\overline{F_x} = \sum_{i=1}^N \frac{m' c_{ix}^2}{a}, \quad (2.5)$$

a felületegységre ható nyomóerő (nyomás)

$$p_x = \frac{\overline{F_x}}{be} = \frac{m'}{abe} \sum_{i=1}^N c_{ix}^2, \quad (2.6)$$

illetve figyelembe véve, hogy  $V=abe$ ,

$$p_x = \frac{m'}{V} \sum_{i=1}^N c_{ix}^2. \quad (2.7)$$

A többi tengelyre nézve hasonló eredményre jutunk

$$p_y = \frac{m'}{V} \sum_{i=1}^N c_{iy}^2, \quad (2.8)$$

$$p_z = \frac{m'}{V} \sum_{i=1}^N c_{iz}^2. \quad (2.9)$$

Mivel a nyomás a tapasztalat szerint minden irányban azonos

$$p = p_x = p_y = p_z. \quad (2.10)$$

A (2.7)-(2.9) egyenleteket összeadva kapjuk

$$3p = \frac{m'}{V} \sum_{i=1}^N (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2). \quad (2.11)$$

Felhasználva, hogy  $c_i^2 = c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2$ , a nyomás értéke

$$p = \frac{1}{3} \frac{m'}{V} \sum_{i=1}^N c_i^2. \quad (2.12)$$

Bevezetve a sebességnégyzetek átlagát, írhatjuk

$$p = \frac{1}{3} \frac{m' N}{V} \frac{\sum_{i=1}^N c_i^2}{N} = \frac{1}{3} m' n \overline{c^2}, \quad (2.13)$$

ahol  $n$  - a térfogategységben statisztikusan tartózkodó molekulák száma (más néven: molekula-koncentráció).

A molekulák átlagos mozgási energiája (ez haladó mozgás)

$$\overline{w}_{kin} = \frac{m' c^2}{2}, \quad (2.14)$$

ezzel a nyomás értéke

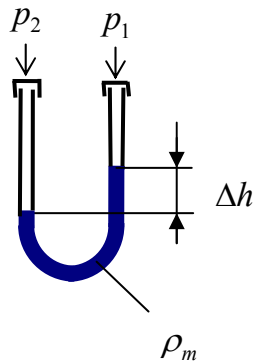
$$p = \frac{2}{3} n \overline{w}_{kin} \quad (2.15)$$

Ez az egyenlet a kinetikai gázelmélet *Clausius* által levezetett alapegyenlete, amely szerint a gáz nyomása az egységnyi térfogatban lévő molekulák haladó mozgásából számított mozgási energiájának összegével számítható. (Az összes energiát az átlagérték és az átlagolt értékek darabszámának szorzataként kapjuk meg.)

A (2.15) egyenlet fontos mondanivalója, hogy a *gáz nyomása számszerűleg egyenlő az egységnyi térfogatban lévő molekulák haladó mozgásából számított összes mozgási energia 2/3 részével.*

A gázok nyomása a felület irányításától független skaláris mennyiség. SI egysége a Pascal (Pa),  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ . Gyakran használatos a mértérendszeren kívüli egység a bar is.  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .

A nyomást folyadékoszlop magassággal is megadhatjuk, pl. U-csöves manométerrel történő nyomásmérés esetén (mmHg-oszlop., mmH<sub>2</sub>O-oszlop), melyből a Pa-ban kifejezett nyomás (vagy nyomáskülönbség) a hidrosztatika



$$p_2 - p_1 = \rho_m g \Delta h$$

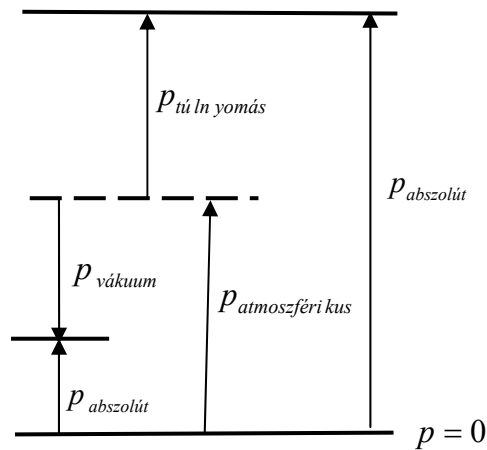
alakú egyenlete segítségével határozható meg, ahol a jelölések a 2.5. ábra szerintiek:  $\rho_m$  – a mérőfolyadék sűrűsége [ $\text{kg/m}^3$ ],  $g$  – nehézségi gyorsulás [ $\text{m/s}^2$ ],  $\Delta h$  – a folyadékoszlop magassága [ $\text{m}$ ].  
 $1 \text{ mmHg} = 133,322 \text{ Pa}$ .

**2.5. ábra - U-csöves manométer**

Angolszász nyomásegység:

PSI – Pound-per-square inch  $\rightarrow 1 \text{ bar} = 14,504 \text{ psi}$ .

Megkülönböztetünk abszolút nyomást, túlnyomást és vákuumot. Ezek értelmezése a 2.6. ábrából következik.



**2.6. ábra - Nyomások értelmezése**

Az *abszolút nyomás* az abszolút vákuumhoz (molekulák nélküli üres tér) képesti nyomás.

Az atmoszférikus nyomáshoz képesti nyomástöbbletet *túlnomásnak* nevezzük. Az abszolút nyomást az atmoszférikus és a túlnomás összegeként számítjuk:

$$p_{abszolút} = p_{atmoszférikus} + p_{túlnomás}$$

Amennyiben a nyomás kisebb, mint az atmoszférikus – *vákuumról* beszélünk.

Ebben az esetben az abszolút nyomás:

$$p_{abszolút} = p_{atmoszférikus} - p_{vákuum}$$

## 2.4. A hőmérséklet kinetikai értelmezése

A hőmérséklet fizikai mibenlétének a kinetikai gázelmélet alapján történő értelmezéséhez vegyünk egy szigetelt hengert (2.7. ábra), melyben a hőát-eresztő dugattyú súrlódás nélkül, szabadon elmozdulhat. A dugattyú két oldalán legyen két különböző (vagy azonos) ideális gáz. A baloldali gáz jellemzőit jelöljük 1-es, míg a jobboldaliét 2-es indexszel.

A dugattyú mechanikai egyensúlyának feltétele a két oldalról ható nyomások egyenlősége:

$$p_1 = p_2$$

vagy a (2.13) alapján

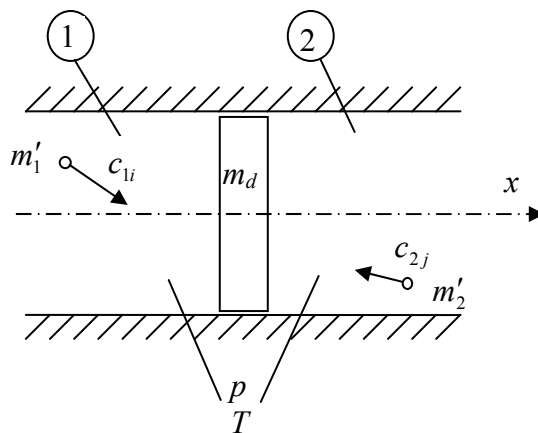
$$n_1 m_1' \overline{c_1^2} = n_2 m_2' \overline{c_2^2}. \quad (2.16)$$

A Brown-féle mozgás tanulságai szerint az egyensúly tartós fennállása csak a két gáz hőmérséklet azonossága esetén biztosítható:

$$T_1 = T_2.$$

A számítások egyszerűsítése céljából a dugattyú molekuláris szerkezetétől eltekintünk. A jobbról és balról a dugattyút érő ütközések az idő átlagában kiegyenlítik egymást, bár egy-egy pillanatban nincs egyensúly és a dugattyú szüntelen – oda-vissza – mozgást végez. (V.ö. a 2.2. ábrával.)

Feltételezzük hogy a gázok nyomása a dugattyú mindkét oldalán olyan kicsi, hogy minden pillanatban csak egy molekula ütközik a dugattyúval.



2.7. ábra A hőmérséklet levezetéséhez választott rendszer

(Pontosabban az egyidejű ütközések száma az egyes ütközések számához képest elhanyagolható.)

Vizsgáljuk meg az első gáz valamelyik ( $i$ -edik) molekulájának a mozgó dugattyúval történő ütközését. A henger hossz tengelye mentén ( $x$  irány) elmozduló dugattyú sebessége ütközés előtt legyen  $u$ , míg ütközés után  $u'$ . A molekula sebességkomponenseit jelöljük analóg módon  $c_{1ix}$ , illetve  $c'_{1ix}$ -szel, a dugattyú tömegét  $m_d$ -vel.

Az ütközés során az impulzus-megmaradás elve és – az abszolút rugalmas ütközés miatt – a kinetikai energia megmaradás törvénye érvényes:

$$m'_1 c'_{1ix} + m_d u = m'_1 c'_{1ix} + m_d u', \quad (2.17)$$

$$\frac{m'_1}{2} c_{1ix}^2 + \frac{m_d}{2} u^2 = \frac{m'_1}{2} c'^2_{1ix} + \frac{m_d}{2} u'^2, \quad (2.18)$$

melyekből a molekula ütközés utáni sebessége

$$c'_{1ix} = \frac{2 m_d u - (m_d - m'_1) c_{1ix}}{m_d + m'_1}. \quad (2.19)$$

A molekula  $x$  tengely irányú sebességének megfelelő kinetikai energia az ütközés után

$$\frac{m'_1 c'^2_{1ix}}{2} = \frac{m'_1}{2} \frac{4m_d^2 u^2 - 4m_d (m_d - m'_1) u c_{1ix} + (m_d - m'_1)^2 c_{1ix}^2}{(m_d + m'_1)^2}. \quad (2.20)$$

Az első gáz minden molekulájának ütközésére felírva ezt a kifejezést, majd összeadva és elosztva az ütközések számával (azaz a molekulák számára átlagolva) kapjuk [elvégezzük a (2.20) kifejezés átlagolását]:

$$\frac{m'_1}{2} \overline{c_{1ix}^2} = \frac{m'_1}{2} \frac{4m_d^2 \overline{u^2} + (m_d - m'_1)^2 \overline{c_{1ix}^2}}{(m_d + m'_1)^2}. \quad (2.21)$$

Itt figyelembe vettük, hogy a hőcsere makroszkopikus folyamata a két gáz között a hőmérséklet-egyenlőség következtében szünetel, így a dugattyú közepes sebessége zérus. A dugattyú rendezetlen rezgőmozgást végez egyensúlyi helyzete körül, vagyis a sebessége azonos valószínűséggel veszi fel a pozitív és negatív értékeket. Ezért az  $u c_{1ix}$  szorzat átlagértéke zérus lesz.

Mivel a két gáz között nincs hőcsere, a vizsgált gáz energiatartalma – és ami vele arányos – a molekulák átlagos kinetikai energiája az ütközés következtében nem változik meg: egyensúlyi állapotban az ütközés előtti átlagos kinetikai energia megegyezik az ütközés utánival, vagyis

$$\frac{m'_1}{2} \frac{4m_d^2 \overline{u^2} + (m_d - m'_1)^2 \overline{c_{1x}^2}}{(m_d + m'_1)^2} = \frac{m'_1}{2} \overline{c_{1x}^2}. \quad (2.22)$$

Ebből egyszerű átalakítások után kapjuk, hogy

$$\frac{m'_1}{2} \overline{c_{1x}^2} = \frac{m_d \overline{u^2}}{2}. \quad (2.23)$$

A fenti gondolatmenetet alkalmazva a második gázra is nyilvánvalóan hasonló eredményt kapunk:

$$\frac{m'_2}{2} \overline{c_{2x}^2} = \frac{m_d \overline{u^2}}{2}. \quad (2.24)$$

A kaotikus molekuláris mozgás során nincs kitüntetve egyetlen mozgásirány sem, mindegyik egyformán valószínű. Ezért

$$\overline{c_x^2} = \overline{c_y^2} = \overline{c_z^2}, \quad (2.25)$$

tehát

$$\frac{m'_1}{2} \overline{c_1^2} = \frac{m'_2}{2} \overline{c_2^2}, \quad (2.26)$$

ami azt jelenti, hogy a két gáz molekuláinak rendezetlen haladó mozgásából származó átlagos kinetikai energia egyenlő.

Ez az eredmény csak a  $T_1$  és  $T_2$  hőmérsékletek egyenlőségének következménye lehet. A nyomás egyenlősége ugyanis a (2.15) egyenlet szerint az átlagos kinetikai energia egyenlősége mellett feltételezi az egységnyi térfogatban lévő molekulák számának egyezését is. Ez utóbbi követelmény azonban nem szerepelt a levezetés kiinduló feltételei között.

Végeredményben tehát arra a megállapításra jutottunk, hogy a különböző gázok, molekuláinak haladó mozgásából számított átlagos kinetikai energiája a termikus egyensúly állapotában azonos. Ebből következik, hogy a gázok abszolút hőmérséklete ( $T$ ) és a molekulák haladó mozgásából számított átlagos kinetikai energia egymással arányos, vagyis

$$\bar{w}_{kin.hal} = \beta T, \quad (2.27)$$

ahol  $\beta$  – minden gázra nézve állandó tényező.

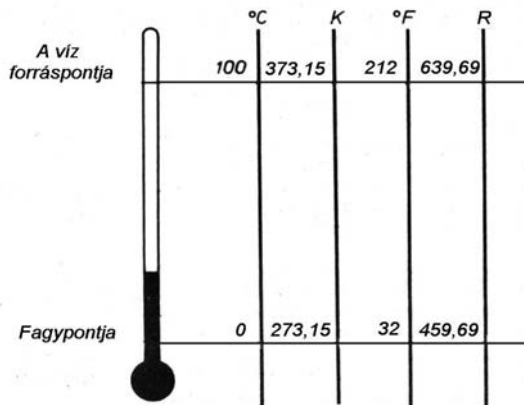
Ilyen módon az abszolút hőmérsékletet, mint a molekulák – haladó mozgásból származó – közepes kinetikai energiájának mértékét definiálhatjuk. A mindjobban csökkenő hőmérséklettel a molekulák mozgása gyengül, és az u.n. abszolút nullapont hőmérsékletén szabályos térbeli elrendezésben csaknem tökéletesen nyugvó molekulákhoz jutunk. (Megjegyezzük, hogy a mai ismereteink szerint még az abszolút nullaponton sem szűnik meg a mozgás tökéletesen.) Az abszolút nullapont hőmérséklete a Celsius hőmérsékleti skálán  $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Az abszolút hőmérséklet SI egysége a K (Kelvin). 1 K hőmérsékletkülönbségnek megállapodás szerint  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$  hőmérsékletkülönbség felel meg, ezért a Kelvinben mért abszolút hőmérséklet ( $T$ ) és a Celsius-fokban mért hőmérséklet ( $t$ ) között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$T[K] = 273,15 + t[{}^{\circ}\text{C}]. \quad (2.28)$$

A hőmérsékletkülönbség a két egységben azonos értékű ( $\Delta T = \Delta t$ ).

A termodinamikában előforduló kifejezésekben mindenütt az abszolút hőmérséklet szerepel, a gyakorlatban azonban a hagyományoknak



### 2.8. ábra - Hőmérsékleti skálák

megfelelően egyéb skálák is elterjedtek. Ezek a nullaérték megválasztásában, illetve az osztásértékekben térnek el egymástól (2.8. ábra).



Ezek a hőfokskálák: az európai kontinensen használatos Celsius skála ( $^{\circ}\text{C}$ ), illetve az angolszász országokban elterjedt Fahrenheit ( $^{\circ}\text{F}$ ) és Rankine (R) skála.

A Celsius és Fahrenheit skála között a következő összefüggés érvényes:

$$^{\circ}\text{C} = (^{\circ}\text{F} + 40) \frac{5}{9} - 40; \quad ^{\circ}\text{F} = (^{\circ}\text{C} + 40) \frac{9}{5} - 40. \quad (2.29)$$

A Fahrenheit skála osztásainak megfelelő abszolút hőmérsékleti skála a Rankine (R) skála

$$T[\text{R}] = 459,69 + t[^{\circ}\text{F}]. \quad (2.30)$$

A Kelvin és Rankine skálák között az átszámítási összefüggés:

$$T[\text{K}] = \frac{5}{9} T[\text{R}]. \quad (2.31)$$

A különböző hőfokskálák összehasonlítása a 2.8. ábrán látható.

## 2.5. A sűrűség értelmezése

Az anyag fontos makroszkopikus jellemzője a  $\rho$  sűrűség. A sűrűségen az egységnyi térfogatú közeg tömegét értjük:

$$\rho = \frac{\text{tömeg}}{\text{térfogat}}. \quad (2.32)$$

A kinetikai gázelmélet szerint a sűrűség az egységnyi térfogatban statisztikusan tartózkodó molekulák összes tömege. Ha egy molekula tömege  $m'$ , akkor

$$\rho = n m'. \quad (2.33)$$

A sűrűség SI egysége:  $\text{kg}/\text{m}^3$ .

A sűrűség reciproka a *fajtérfogat*, vagyis az egységnyi tömeg által betöltött, térfogat:

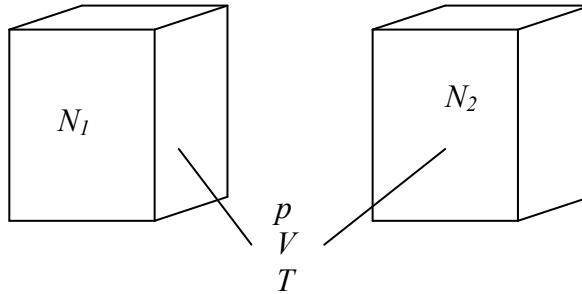
$$v = \frac{\text{térfogat}}{\text{tömeg}} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{m'n}. \quad (2.34)$$

Mértékegysége ebből következőleg  $\text{m}^3/\text{kg}$ .

A termodinamikában inkább a fajtérfogatot használják, az áramlástanban pedig a sűrűséget. A két mennyiség a (2.34) szerint bármikor könnyen átszámítható.

## 2.6. Avogadro törvénye

Legyen két különböző gáz térfogata, nyomása és hőmérséklete azonos (2.9. ábra). Legyen az egyik gáz molekuláinak tömege, négyzetes közép-



2.9. ábra - A vizsgált két rendszer

sebessége és molekuláinak száma sorra  $m'_1, \overline{c_1^2}$ , és  $N_1$  a másiké  $m'_2, \overline{c_2^2}$ , és  $N_2$ .

Mivel a hőmérséklet azonos, a két gáz molekuláinak közepes kinetikai energiája megegyezik:

$$\frac{m'_1 \overline{c_1^2}}{2} = \frac{m'_2 \overline{c_2^2}}{2}, \quad (2.35)$$

a nyomások egyenlőségéből, a (2.15) alapján következik

$$\frac{2}{3} n_1 \overline{w_{kin1}} = \frac{2}{3} n_2 \overline{w_{kin2}}. \quad (2.36)$$

A két egyenlet egybevetéséből azonnal kapjuk, hogy

$$n_1 = n_2 = n,$$

illetve a két térfogat egyenlőségéből következőleg

$$N_1 = N_2 = N. \quad (2.37)$$

Ez Avogadro törvénye, mely szerint az azonos hőmérsékletű és azonos nyomású gázok egyenlő térfogataiban lévő molekulák száma a gáz mine-műségétől függetlenül egyenlő.

$T = 273,15$  K hőmérsékleten és  $p = 101325$  Pa nyomáson (fizikai normál-állapotban) az  $1 \text{ cm}^3$  térfogatban lévő molekulák száma  $n_o = 2,68 \cdot 10^{19}$  – a Loschmidt-féle szám.

Két azonos nyomású és hőmérsékletű gáz  $\rho_1 = n m'_1$  és a  $\rho_2 = n m'_2$  sűrűségének és fajtérfogatának aránya

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m'_1}{m'_2}, \quad (2.38)$$

illetve

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (2.39)$$

Az utóbbi arány szerint

$$m'_1 v_1 = m'_2 v_2, \quad (2.40)$$

tehát az  $m'v$  szorzat azonos nyomás és hőmérséklet esetén minden gázra egyenlő. Tartalmának közelebbi megvilágítására definiáljuk először a *relatív molekulatömeg* – továbbiakban *molekulatömeg* – fogalmát.

Molekulatömegben méretnélküli viszonzyszámot értünk (relatív molekulatömeg), amely azt mutatja meg, hogy a kérdéses molekula tömege hány-szorosa az  $u$  atomi tömegegységnek, amely a  $C_{12}$  szénatom-izotóp tömegének  $1/12$  részével egyenlő.  $1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

A gáz relatív molekulatömege az

$$M = \frac{m'}{u} \quad (2.41)$$

hányados.

Ha most a gázból annyi kilogrammnyi tömeget veszünk, mint amennyi a relatív molekulatömege – vagyis  $M$  kilogrammnyi tömeget – akkor azt mondjuk, hogy a gáz *kilomoltömegnyi* – röviden: *kilomolnyi* (kmol)-mennyiségével rendelkezünk.

A kilomoltömeg számértéke megegyezik a molekulatömeg számértékével, de nem méretnélküli, hanem kg/kmol mértékegységű szám.

A kilomolnyi mennyiségben lévő molekulák száma

$$N_M = \frac{M[\text{kg} / \text{kmol}]}{M[-] u[\text{kg}]} = \frac{1}{u} = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ (1/kmol)}. \quad (2.42)$$

Mondhatjuk tehát, hogy a gáz kilomoltömegében – kilomolnyi mennyiségében – lévő molekulák száma minden gázra azonos és ez az Avogadro-féle számnak nevezett  $N_M = 6,023 \cdot 10^{26}$  (1/kmol) mennyiség.

Ezzel megfogalmazhatjuk Avogadro törvényének másik definícióját: A különböző gázok kilomolnyi mennyiségeiben  $6,023 \cdot 10^{26}$  molekula van. Amennyiben egybevetjük a két definíciót, vagy a (2.40) egyenletet  $N_M$ -el szorosa kapjuk

$$N_M m'_1 v_1 = N_M m'_2 v_2 = V_M, \quad (2.43)$$

megfogalmazhatunk egy harmadikat: a különböző gázok kilomolnyi mennyiségei azonos nyomáson és hőmérsékleten azonos térfogatúak, vagyis ezen feltételek mellett a különböző gázok kilomoltérfogata ( $V_M$ ) azonos.

A  $V_M$  mértékegysége tehát  $\text{m}^3/\text{kmol}$ . Ez a térfogat  $T=273,15$  K hőmérsékleten és  $p=101325$  Pa nyomáson  $V_M = 22,414 \text{ m}^3/\text{kmol}$ .

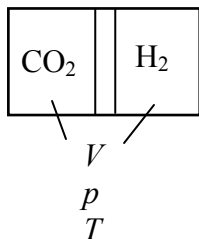
### Példa:

Egy hengert a benne sűrűdés nélkül elmozduló dugattyú két azonos részre osztja, ahol az egyikben 1kg hidrogén a másikban széndioxid van. Termodinamikai egyensúly esetén meghatározandó:

a)  $m_{\text{CO}_2}=?$ ;    b)  $N_{\text{CO}_2}=?$ ;    c)  $t = 27 \text{ }^\circ\text{C}$  esetén a  $\left(\sqrt{c^2}\right)_{\text{CO}_2} = ?$

$R_M=8314 \text{ J}/(\text{kmol K})$ ,     $N_A=6,023 \cdot 10^{26} \text{ 1}/\text{kmol}$ ,     $M_{\text{CO}_2}=44$ ,     $M_{\text{H}_2}=2$ .

### Megoldás:



a) Avogadro törvényéből következőleg a  $\text{CO}_2$  kilomolszáma megegyezik a  $\text{H}_2$  kilomolszámával, így  $m_{\text{CO}_2} = 0,5M_{\text{CO}_2} = 0,5 \cdot 44 = 22 \text{ kg}$ .

b) A fél kilomol széndioxidban  $N_{\text{CO}_2} = 0,5N_A = 0,5 \cdot 6,023 \cdot 10^{26} = 3,0115 \cdot 10^{26}$  db. molekula van.

c) A  $\text{CO}_2$  molekulák haladó mozgásból számított átlagos

mozgási energiája  $\frac{m'c^2}{2} = \bar{w}_{\text{kinhal}} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \frac{R_M}{N_A} T$ ,

melyből  $\sqrt{c^2} = \sqrt{3 \frac{R_M}{M_{\text{CO}_2}} T} = \sqrt{3 \frac{8314}{44} 300} = 412,38 \text{ m/s}$ .

### 3. Az általános gáztörvény (Az ideális gáz állapotegyenlete)

A kinetikai gázelmélet alapegyenletét elméleti úton vezettük le, de az elméleti eredményeket mindig kísérletileg is ellenőrizni kell. Jelen esetben az ellenőrzés módja az lesz, hogy megnézzük, származtatható-e a tapasztalati úton nyert

$$p v = R T \quad (3.1)$$

alakú általános gáztörvény a kinetikus gázelmélet alapján?

E célból helyettesítsük be a kinetikus gázelmélet (2.15) alapegyenletébe  
 - a (2.34) egyenletből kifejezett  $n$  molekula-koncentrációt a gáz  $v$  fajtérfogatával és

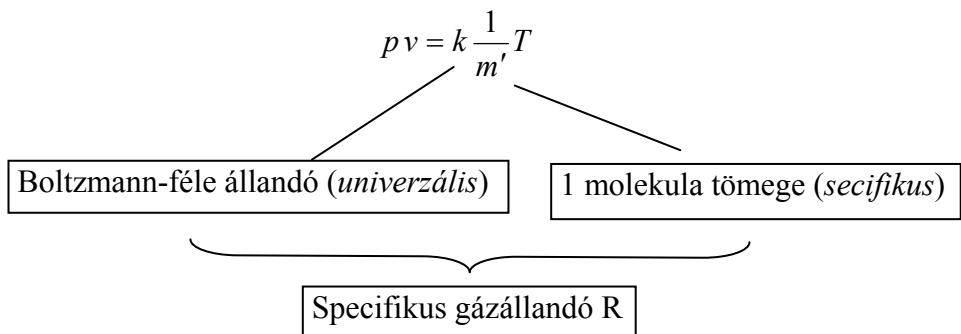
- a  $\tilde{w}_{kin}$  átlagos mozgási energiát (2.27) összefüggésből

$$p = \frac{2}{3} n \tilde{w}_{kin} = \frac{2}{3} \frac{1}{m'v} \tilde{w}_{kin} = \frac{2}{3} \beta \frac{1}{m'v} T. \quad (3.2)$$

Ebben az egyenletben  $\beta$ , és ezzel  $\frac{2}{3} \beta$  a gáz mineműségétől független állandó mely a

$$k = \frac{2}{3} \beta \quad (3.3)$$

kifejezés szerint számítható, Boltzmann-féle állandó elnevezést kapta ( $k=1,3805 \cdot 10^{-23}$  J/K). Ezt behelyettesítve (3.2)-be és átrendezve, kapjuk



$$R = k \frac{1}{m'}. \quad (3.4)$$

A specifikus gázállandó tehát a Boltzmann-féle állandó és az 1 kg gázban lévő molekulák darabszámának szorzata.

Ezzel egyenletünk így alakul:

$$p v = R T . \quad (3.5)$$

A (3.5) egyenletet az ideális gázok állapotegyenletének nevezzük. Levezetésénél a kinetikai gázelmélet alapegyenletéből indulunk ki, de ugyan-  
ezt az alakú egyenletet – mint az előzőekben is utaltunk rá – az ideális gá-  
zokra érvényes (középiskolai tanulmányainkból ismert) makroszkopikus  
tapasztalati törvényekből, a (Gay-Lussac és a Boyle–Mariotte-törvényből)  
kiindulva is megkaphatjuk (pl. [14], [21]).

Az  $R$  arányossági tényezőt (mivel  $k$  – minden gázra azonos) csak a gáz  
anyagától ( $m'$ ) függ, ezért specifikus (egy adott gázra érvényes) gázál-  
landónak nevezzük.

A (3.5) egyenlet fontosságát hangsúlyozza az a körülmény, hogy a termo-  
dinamikai irodalomban sokhelyütt az ideális gázt egyszerűen úgy defini-  
álják, mint olyan gázt, amely a  $p v = R T$  törvényt követi (pl. [2], [12]).

#### **Az állapotegyenlet különböző formáit megkapjuk:**

- amennyiben a (3.5) egyenletet  $m$  tömegre alkalmazzuk (az  
egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg az  $m$  tömeggel)

$$p v m = m R T , \quad \rightarrow \quad p V = m R T , \quad (3.6)$$

- kilomolnyi mennyiségre alkalmazva

$$p v M = M R T \rightarrow p V_M = M R T , \quad (3.7)$$

ahol  $V_M$  a kilomoltérfogat.

$$p V_M = M k \frac{1}{m'} T = \frac{M}{m'} k T = \underbrace{N_A k}_{R_M} T$$

Univerzális gázállandó  $R_M$

Az univerzális gázállandó tehát a Boltzmann-féle állandó és az 1 kmol  
gázban lévő molekulák darabszámának szorzata

$$R_M = N_A k . \quad (3.8)$$

Az univerzális gázállandó értéke  $R_M = 8314 \text{ J}/(\text{kmol K})$ .

Ezzel a kilomolnyi mennyiségre vonatkozó állapotegyenlet

$$pV_M = R_M T. \quad (3.9)$$

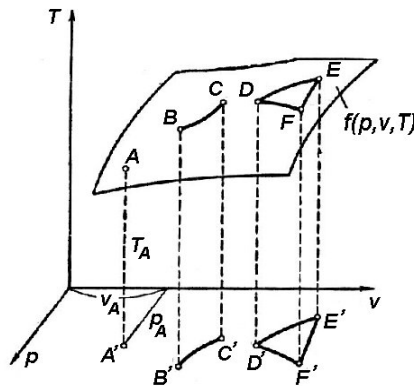
A specifikus és univerzális gázállandó kapcsolata a (3.7) és (3.9) egyenletek egybevetéséből

$$R = \frac{R_M}{M}. \quad (3.10)$$

A (3.5) egyenletbe behelyettesítve a specifikus gázállandó (3.10) szerinti kifejezését, az állapotegyenlet egy újabb alakját kapjuk meg

$$pV = \frac{m}{M} R_M T = \mu R_M T, \quad (3.11)$$

ahol  $\mu$  - kilomolszám.



**3.1. ábra – Az állapotfelület**

Az állapotegyenlet a  $p - v - T$  koordináta rendszerben egy felületet határoz meg (állapotfelületet), mely magába foglalja az adott gáz összes állapotát (3.1. ábra). A gáz állapotának változása is ezen a felületen játszódik le és általános esetben térgörbét ír le.

A gyakorlatban a térgörbe helyett annak  $p - v$ ,  $T - p$ , és  $T - v$  síkokra eső vetületével dolgozunk. A vetületek esetében a harmadik koordináta az egyes vetületi pontokhoz az állapotegyenletből kerül meghatározásra. A 3.1. ábra esetében – mivel  $p - v$  síkra eső vetületről van szó – ez a hőmérséklet.

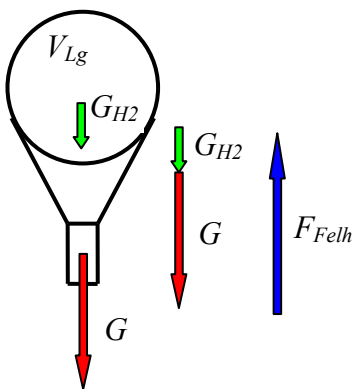
### Példa:

Mekkora legyen a hidrogénnel ( $M_{H_2} = 2$ ) töltött léggömb térfogata, ha a felemelendő tárgy és a léggömb gáz nélküli saját súlyának összege  $G = 3000$  N. A levegő nyomása a maximális magasságban, ahová a léggömbnek fel kell jutnia 0,5 bar és a hőmérséklet  $0^\circ\text{C}$ .

Mennyire változik meg a léggömb emelőereje, ha biztonsági okokból héliummal töltjük meg ( $M_{He}=4$ )? Mekkora a hélium tömege?

Mekkora a léggömb térfogata a földön, ha  $p = 1$  bar,  $t = 30^\circ\text{C}$ ?  $R_{lev}=287$  J/(kg K),  $R_M= 8314$  J/(kmol K).

### Megoldás:



A maximális magasságon felemelendő tárgy, az üres léggömb (együtt  $G$ ) és gáztöltet ( $G_{H_2}$ ) súlyának összege egyenlő a felhajtóerővel ( $F_{Felh}$ ).

$$G + G_{H_2} = F_{Felh}.$$

A felhajtóerő Archimédész törvénye szerint

$$F_{Felh} = V_{Lg} \rho_{lev} g,$$

ahol  $V_{Lg}$  – a léggömb térfogata,  $\rho_{lev}$  – a levegő sűrűsége a maximális magasságon.,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>.

$$G_{H_2} = V_{Lg} \rho_{H_2} g.$$

$$\text{Ezzel } G + V_{Lg} \rho_{H_2} g = V_{Lg} \rho_{lev} g.$$

$$\text{Melyből a léggömb térfogata: } V_{Lg} = \frac{G}{g(\rho_{lev} - \rho_{H_2})}.$$

A sűrűségek az állapotegyenletből

$$\rho_{lev} = \frac{p_{H \max}}{R_{lev} T_{H \max}} = \frac{0,5 \cdot 10^5}{287 \cdot 273,15} = 0,638 \text{ kg/m}^3.$$

$$\rho_{H_2} = \frac{p_{H \max}}{R_{H_2} T_{H \max}} = \frac{0,5 \cdot 10^5}{4157 \cdot 273,15} = 0,044 \text{ kg/m}^3.$$

A hidrogén gázállandója

$$R_{H_2} = \frac{R_M}{M_{H_2}} = \frac{8314}{2} = 4157 \text{ J/(kg K)}.$$



A léggömb térfogata, amilyenre készítik

$$V_{Lg} = \frac{G}{g(\rho_{lev} - \rho_{H_2})} = \frac{3000}{9,81(0,638 - 0,044)} = 514,569 m^3.$$

A léggömb emelőereje

$$F_e = F_{felh} - G_{gáztöltet} = V_{Lg} (\rho_{lev} - \rho_{gáztöltet}) = V_{Lg} (\rho_{lev} - \rho_{He}).$$

A hélium gázállandója

$$R_{He} = \frac{R_M}{M_{He}} = \frac{8314}{4} = 2078,5 J/(kg K).$$

A hélium sűrűsége a maximális magasságon

$$\rho_{He} = \frac{p_{H_{max}}}{R_{He} T_{H_{max}}} = \frac{0,5 \cdot 10^5}{2078,5 \cdot 273,15} = 0,088 kg/m^3.$$

Az adott térfogatú léggömb emelőereje

$$F_e = V_{Lg} (\rho_{lev} - \rho_{He}) = 514,569(0,638 - 0,088) = 2777,3 N.$$

Az emelőerő megváltozása

$$\Delta F_e = G - F_e = 3000 - 2777,3 = 222,7 N.$$

A hélium tömege az állapotegyenletből

$$m_{He} = \frac{p_{H_{max}} V_{Lg}}{R_{He} T_{H_{max}}} = \frac{0,5 \cdot 10^5 \cdot 514,569}{2078,5 \cdot 273,15} = 45,349 kg.$$

A léggömb térfogata a földön az állapotegyenletből

$$V_{LgH0} = \frac{m_{He} R_{He} T_{H0}}{p_{H0}} = \frac{45,349 \cdot 2078,5 \cdot 303,15}{10^5} = 285,607 m^3.$$

## 4. Valóságos gázok állapotegyenletei

Az ideális gázokra levezetett általános gáztörvény valóságos gázokra csak bizonyos feltételek teljesülése (viszonylag nagy hőmérséklet, kis nyomás) esetén marad érvényben, bár akkor is csupán jó közelítéssel írja le azok viselkedését.

Az eltérés azzal kapcsolatos, hogy a valóságos gázok molekulái nem térfogat nélküli tömegpontok és a molekulák között az ütközésből származó erőhatáson kívül vonzó és taszító erők is hatnak, melyek a molekulák közötti távolság függvényében változnak.

A valóságos gázok molekuláinak ütközését tanulmányozva szem előtt kell tartani, hogy azok nem kemény golyókként ütköznek egymáshoz, hanem a taszító erők ellenében csak többé-kevésbé közelítik meg egymást. A molekula átmérőjének azt a távolságot tekintjük, amilyen távolságon a vonzó és taszító erők kiegyenlítik egymást. Így az ilyen átmérővel számított molekula-térfogat egyben a taszító erők hatásának figyelembevételét is jelenti.

Az ideális gáz jellemzői:

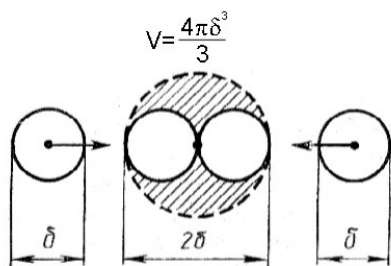
- a molekulának nincs térfogata,
- a molekulák között nincs erőhatás (csak mozgási energiával rendelkeznek).

Valóságos gázok molekulái

- térfogattal rendelkeznek,
- és közöttük egyidejűleg hatnak vonzó és taszító erők.

Bár a molekulák mérete és a molekulák közötti erőhatás is kicsiny, kis hőmérsékleten vagy nagy nyomáson elhanyagolásuk jelentős hibához vezet.

A gáz térfogatának egy részét maguk a molekulák foglalják el, így az nem áll rendelkezésre a szabad mozgásra. Két molekula ütközésekor a molekula



4.1. ábra - Molekulák ütközése.

lák – amennyiben gömb alakúnak tekintjük azokat – középpontjai csak 1 átmérőnyi ( $\delta$ ) távolságra tudják egymást megközelíteni (4.1. ábra). Az edény falához történő ütközésnél a hatásgömb középpontja a faltól  $\delta/2$  távolságra van.

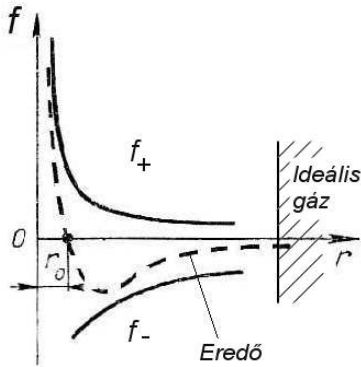
Tehát végeredményben a molekulák mozgásához az edény térfogatánál csak kisebb térfogat áll rendelkez-

zésre.

Egy-egy ütközés során két molekula-átmérőnyi ( $2\delta$ ) átmérőjű gömb térfogatának megfelelő térfogat

$$V = \frac{(2\delta)^3 \pi}{2 \cdot 6} = 4 \frac{\delta^3 \pi}{6} \quad (4.1)$$

esik ki, vagyis egy molekula térfogatának négyszerese.



**4.2. ábra - A molekulák közötti erők**

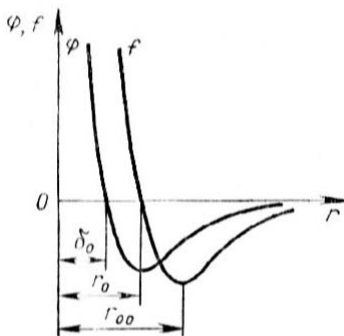
A molekulák között ható erők a molekulák közötti távolság  $n$ -edik hatványával fordítottan arányosak

$$f \approx \frac{I}{r^n}, \quad (4.2)$$

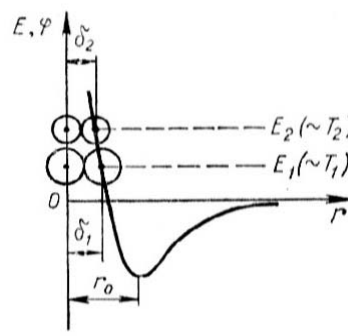
ahol a vonzóerők esetében  $n = 5 \div 7$ , taszító erőknél  $n = 9 \div 15$  [7].

A taszító erők ( $f_+$ ) a távolsággal gyorsabban csökkennek, mint a vonzó erők ( $f_-$ ), így egy meghatározott  $r_0$  távolságon egyensúlyba jutnak

(4.2. ábra). Ha a molekulák valamilyen okból az egyensúlyi távolságnál közelebb kerülnek egymáshoz, a taszító erők megnőnek, hogy visszaálljon az egyensúly és fordítva. A molekulák ütközése tehát nem a biliárdgolyók ütközéséhez hasonlóan játszódik le.



a)



b)

**4.3. ábra - A molekulák közötti erők és energiák**

Nagyságrendileg:  $r_o \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ ;  $r > 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$  esetén  $f \approx 0$  (ideális gáz) [7].

A valóságos gáz molekulái tehát potenciális energiával ( $\varphi$ ) is rendelkeznek, mely a 4.3/a. ábra szerint változik.

A molekulák közeledését és ütközését vizsgálva tekintsük a 4.3/b. ábrát. Tétélezzük fel, hogy az egyik molekula az origóban tartózkodik, míg a másik a végtelenből a  $T_1$  hőmérséklettel arányos  $w_{kin\infty} = w_1(\sim T_1)$  kezdeti energiakészlettel az  $r = r_o$  távolságig – a vonzó erő miatt – egyre nagyobb sebességgel közelít felé. Eközben a két molekula teljes energiája változatlan marad, vagyis

$$w_{kin} + \varphi(r) = \text{állandó} = w_1(\sim T_1). \quad (4.3)$$

A 4.3/b. ábrán a folytonos vonal a potenciális energiát [ $\varphi(r)$ ], a szaggatott a teljes energiakészletet szemlélteti.

Amint a második molekula áthalad az  $r = r_o$  ponton a vonzás taszításra változik és a további mozgás során rohamos sebességcsökkenés játszódik le: a mozgási energia potenciális energiává alakul. Abban a pillanatban amikor a potenciális energia megegyezik a rendszer teljes energiakészletével  $E_1 = \varphi(r = \delta_1)$ , a második molekula sebessége zérus lesz. Az a minimális  $\delta_1$  távolság, melyre az adott  $E_1$  energiaszintnél a molekulák megközelítik egymást, az u.n. effektív molekula (hatásgömb) átmérő.  $E_2$  energiaszintnél az effektív molekula átmérő  $\delta_2$ .

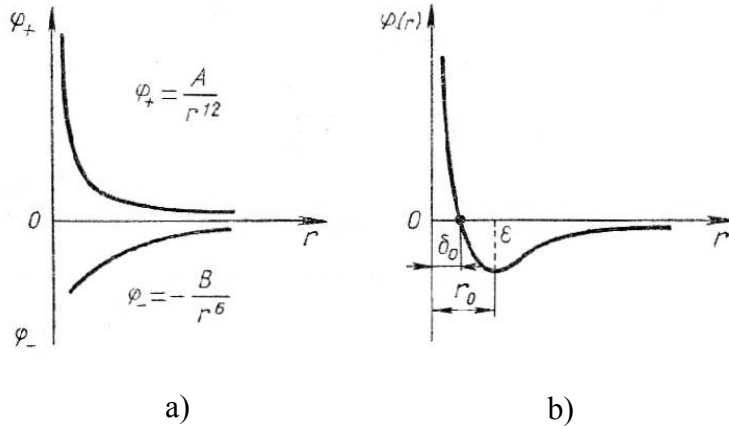
A megállás után fordított jelenség játszódik le.

A 4.3/b. ábrából látható, hogy a második molekula kezdeti energiakészletének növekedésével – vagyis a hőmérséklet növekedésével – a minimális távolság ( $\delta_2$ ) csökken. Ugyanakkor  $r < r_o$  esetén a potenciális energia görbéje meredeken emelkedik, ezért az effektív átmérő a hőmérsékletváltozással csak nagyon kicsit változik.

Két molekula közötti potenciális energia (Lennard–Jones egyenlet)

$$\varphi(r) = 4\varepsilon \left[ \left( \frac{\delta_o}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\delta_o}{r} \right)^6 \right]. \quad (4.4)$$

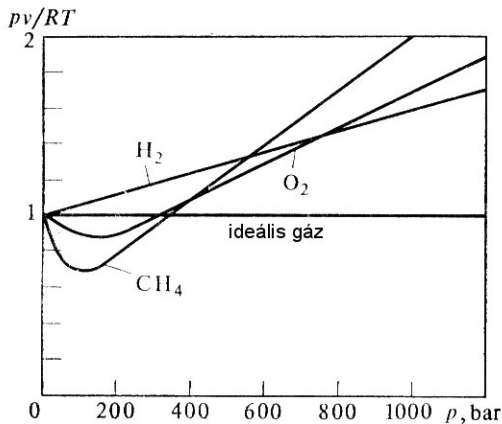
A (4.4) egyenlet szerinti 6-12 potenciál 4.4. ábra szerint változik. Az *a*) ábra a vonzó és taszító, míg a *b*) az eredő potenciális energia változását mutatja.



4.4. ábra - Potenciális energiák változása a molekulák közötti távolság függvényében

#### 4.1. Kompresszibilitási tényezők alak

A valóságos gázok állapotegyenletének egyik módszere, hogy az ideális gáz állapotegyenletébe korrekciós tényezőket vezetnek be, melyek a fentiekben részletezett eltéréseket veszik figyelembe.



4.5. ábra - Kompresszibilitási tényező változása a nyomás függvényében [24]

Alakja

$$pv = \nu RT \quad (4.5)$$

vagy

$$\frac{pv}{RT} = \nu, \quad (4.6)$$

ahol  $\nu$  – kompresszibilitási tényező  $\nu = f(p, T)$ .

A különböző gázok kompresszibilitási tényezői a táblázatosan vagy diagram formájában kerülnek megadásra.

Az 4.5. ábrán a kompresszibilitási tényező változása látható a nyomás függvényében  $t = 0 \text{ °C}$  hőmérsékleten oxigén, hidrogén és metán esetére.

## 4.2. Viriál egyenletek

Az utóbbi 100 évben nagyszámú valóságos gázegyenletet javasoltak, de egyik sem bizonyult általánosnak. A statisztikus termodinamika fejlődése lehetővé tette egzakt valóságos gáz állapotegyenletek levezetését viriál alakba (pl. [9], [11], [12]):

$$\begin{aligned} \text{vagy} \quad \frac{pv}{RT} &= 1 + \frac{B(T)}{v} + \frac{C(T)}{v^2} + \frac{D(T)}{v^3} + \dots \\ \frac{pv}{RT} &= 1 + B'(T)p + C'(T)p^2 + D'(T)p^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

ahol  $B, C, D, \dots, B', C', D', \dots$  viriál-együtthatók, melyek csak a hőmérséklet függvényei és a molekulák potenciális energiája  $[\varphi(r)]$  alapján kerülnek meghatározásra. A második viriál együtthatók ( $B, B'$ ) a páros, a harmadik ( $C, C'$ ) a hármas ütközéseket vesznek figyelembe stb. Minél nagyobb a nyomás annál több együttható meghatározása válik szükségessé.

## 4.3. Van der Waals egyenlete

A valóságos gáz állapotának leírására *van der Waals* (1837-1923) holland tudós dolgozott ki egyszerű, jól követhető modellt, (egyszerű mechanikai értelmezést adott a korrekciós tényezőknek) mely szerkezetében jól mutatja az ideális gáztól a valóságos gáz felé mutató átmenetet és jól veszi figyelembe a valóságos gáznál meglévő sajátosságokat.

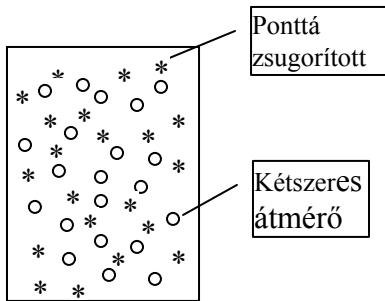
### 4.3.1. Térfogati korrekció

Az egyenlet levezetését 1 kg gázra végezzük és feltételezzük, hogy a gáz sűrűsége (ezzel nyomása) nem nagy. Így az olyan esetek, amikor két molekulánál több ütközik egyszerre, nagyon ritkán fordulnak elő.

Legyen az 1 kg gáz térfogata  $v$  és tartalmazzon  $N_{1kg}$  db molekulát (4.6. ábra).

A gáz nyomása a (2.15) egyenlet szerint az egységnyi térfogatban lévő molekulák haladó mozgásából számított mozgási energiájának összegével számítható és nem függ attól, hogyan oszlik meg ez az energiamennyiség az egyes molekulák között.

A nyomás számításánál tehát eljárhatunk úgy is, hogy a molekulák felét megállítjuk és csak a másik fele mozog összességében kétszeres mozgási energiával. Az eredmény nyilvánvalóan ugyanaz lesz.



**4.6. ábra - Megállított és mozgó molekulák**

Növeljük meg az álló  $N_{1kg} / 2$  darab molekula átmérőjét (hatásgömb átmérőjét) kétszeresére, míg a mozgó ( $N_{1kg} / 2$  db) molekulákat tekintjük pontszerűnek. Következésképpen a pontszerű mozgó molekuláknak az álló, megnövelt átmérőjű molekulák összterfogatával kevesebb tér áll rendelkezésére a mozgáshoz [4.1. és 4.6. ábra, valamint (4.1) egyenlet].

A kieső térfogat

$$b = \frac{N_{1kg} (2\delta)^3 \pi}{2 \cdot 6} = 4N_{1kg} \frac{\delta^3 \pi}{6} \quad (4.8)$$

lesz, vagyis az összes molekula térfogatának négyszerese. Az ilyen mértékben csökkentett térben mozgó pontszerű molekulákra alkalmazható az ideális gázra levezetett (2.15) nyomás-egyenlet, amit a Boltzmann-féle állandó bevezetésével

$$p = nkT \quad (4.9)$$

alakban írva használunk fel.

Figyelembe kell azonban venni, hogy az egységnyi térfogatban  $n' = \frac{N_{1kg}}{2(v-b)}$  molekulaszámú ideális gáz a kétszeres mozgási energia miatt  $T' = 2T$  hőmérséklettel rendelkezik.

Ez utóbbi részt ideális gáznak tekinthetjük, melynek molekulái a  $v$  térfogatot az álló dupla átmérőjű molekulákkal csökkentett térfogatban mozognak (4.6. ábra).

A pontszerű molekulákra írható

$$p = n'kT' ; \quad (4.10)$$

így a nyomás

$$p = \frac{N_{1kg}}{2(v-b)} kT' = \frac{N_{1kg}}{2(v-b)} k2T , \quad (4.11)$$

ahol  $b$  – az álló molekulák össztérfogata (4.8).

Az (4.11) egyenletet rendezve, kapjuk

$$p(v - b) = N_{\text{kg}} kT, \quad (4.12)$$

illetve

$$p(v - b) = RT. \quad (4.13)$$

Ez az egyenlet figyelembe veszi a molekula térfogatot.

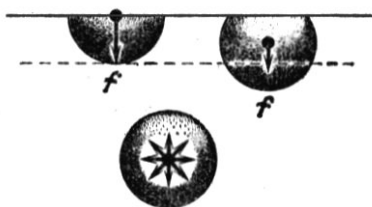
### 4.3.2. Nyomáskorrekció

A molekulák között ébredő erők következtében kisebb lesz az edény falához történő ütközések száma és a falra ható erő, mivel a fal közelében tartózkodó molekulákra az edény belsejében tartózkodó molekulák vonzása is hat. Ez a vonzó hatás mint egy molekuláris belső nyomás jelenik meg, mely csökkenti az edény falára ható nyomást.

Ezt figyelembe véve a (4.13) egyenlet a következő alakra módosítható:

$$p = \frac{RT}{(v - b)} - p_b. \quad (4.14)$$

A molekulák közötti erőhatások figyelembevételéhez a molekulákat pontszerűnek tekintjük, melyek között vonzóerők hatnak, s a kölcsönhatásban egyszerre sok molekula vesz részt.



**4.7. ábra – Erőhatások a molekulák között**

Próbáljuk meg nyomon követni a molekulákra a környező molekulák részéről kifejtett hatást. A mélyen a gáztérfogat belsejében lévő molekulák esetében a molekulára ható erők kiegyenlítik egymást. Változik a helyzet akkor, ha a molekula a határoló fal közelébe jut. Ekkor a molekulára a gáztérfogat belseje felé mutató eredő vonzóerő ( $f$ ) hat. Ez az erő legnagyobb a fal mellett tar-

tózkodó molekulák esetében és csökken a faltól távolodva (4.7. ábra).

Amikor a molekula a határoló falnak ütközik, impulzusa megváltozik. Az impulzusváltozás számítása hasonlóan történhet, mint az ideális gáz nyomásának meghatározásakor tettük, vagyis az egységnyi felületre időegység alatt ütköző molekulák impulzusának változása



$$nm'\overline{c^2}/3. \quad (4.15)$$

Az ideális gázoktól eltérően azonban ez az impulzusváltozás nem csupán a fal részéről megnyilvánuló erőnek, hanem a fal melletti rétegben lévő molekulákra ható – a gáztérfogat belseje felé mutató- vonzóerőnek is következménye. Ha a felületegységre ható erőket nyomásként értelmezzük, akkor a fal melletti gáztéreg egységnyi felületére ható erő mint egy közepes belső (molekuláris) nyomás fogható fel. Írható tehát, hogy

$$p + p_b = nm'\overline{c^2}/3 \quad (4.16)$$

vagy

$$p + p_b = nkT. \quad (4.17)$$

A  $p_b$  felületegységre eső erő mint a fal melletti réteg egységnyi felületére jutó molekulaszám ( $N_r$ ) és a réteg molekulájára ható  $f$  erő szorzatának átlaga számítható:  $p_b = \overline{N_r} \cdot \overline{f}$ . Másrészt felírható, hogy  $p_b \sim \overline{N_r} \cdot \overline{f}$ .

Mind az  $N_r$ , mind az  $f$  arányos a sűrűséggel, tehát fordítva arányos a fajtérfogattal, vagyis

$$p_b = \frac{a}{v^2}, \quad (4.18)$$

ahol  $a$  – az adott gázra jellemző állandó.

Ezzel a (4.18) egyenlet  $n = N/v$  és  $Nk = R$  miatt a

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)v = RT \quad (4.19)$$

alakot ölti, vagyis a molekulák közötti erőhatás tárgyalt módon történő figyelembe vétele az ideális gáz állapotegyenletet így módosítja.

A két hatás együttes jelentkezését a (4.14) és (4.19) egyenletek kombinációjával adhatjuk vissza:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT. \quad (4.20)$$

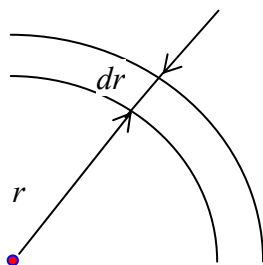
A nyomáskorrekció tartalmának pontosabb feltárásához és az  $a$  állandó értékének meghatározása érdekében vizsgáljuk meg a molekulák energetikai egymásrahatását.

A molekulák ütközése  $r \leq \delta_0$  távolságnál fejeződik be, így a molekuláris nyomás meghatározásához össze kell adni a részecskék egymáshatási energiáit  $r \geq \delta_0$  esetén.

Ehhez vegyünk az adott molekula körül egy  $r$  sugarú  $dr$  vastagságú gömbhéjat (4.8. ábra).

Két molekula közötti potenciális energia  $\varphi(r)$  ebből az adott molekulára jut

$$de_{p1} = \frac{\varphi(r)}{2}. \quad (4.21)$$



A gömbhéj térfogata  $4r^2\pi dr$ , a rétegben tartózkodó molekulák száma  $n4r^2\pi dr$ , ahol

$$n = \frac{N_{1kg}}{v}.$$

Az adott molekula és a többi közötti potenciális energia

**4.8. ábra - Gömbhéj a gázban molekula körül**

$$e_{p1} = \frac{n4\pi}{2} \int_{\delta_0}^{\infty} \varphi(r)r^2 dr, \quad (4.22)$$

illetve 1 kg-ra ( $N_{1kg}$  molekulára) vonatkoztatva

$$e_p = \frac{2\pi N_{1kg}^2}{v} \int_{\delta_0}^{\infty} \varphi(r)r^2 dr. \quad (4.23)$$

Bevezetve a

$$2\pi N_{1kg}^2 \int_{\delta_0}^{\infty} \varphi(r)r^2 dr = -a \quad (4.24)$$

jelölést, így

$$e_p = \frac{2\pi N_{1kg}^2}{v} \int_{\delta_0}^{\infty} \varphi(r)r^2 dr = -\frac{a}{v}. \quad (4.25)$$

A térfogatváltozási munka és a potenciális energia közötti kapcsolat az energiamegmaradás törvénye alapján

$$w = -e_p, \quad (4.26)$$

$$dw = -p_p dv, \quad (4.27)$$

$$de_p = p_p dv, \quad (4.28)$$

ebből a potenciális energiából származó nyomás

$$p_p = \frac{de_p}{dv} = \frac{d}{dv} \left( -\frac{a}{v} \right) = \frac{a}{v^2}. \quad (4.29)$$

A belső nyomás folyadékok esetében nagyon nagy (vízre 293 K hőmérsékleten értéke  $\approx 10800$  bar), gázokra viszonylag kicsi és függ a nyomástól és a hőmérséklettől (1 bar nyomáson  $p_b \approx 0,01$  bar) [24].

A van der Waals-egyenlet végső alakja tehát

$$\left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT. \quad (4.30)$$

Ez az 1893-ban levezetett van der Waals-féle egyenlet. Érvényességének feltétele, hogy  $b \ll v$  és  $a/v^2 \ll p$  legyen. Ezen kívül a levezetés feltételezi, hogy a gázmolekulák rugalmas szilárd gömbök. Ebből következik, hogy a valóságban még viszonylag kis nyomások esetén is  $a$  és  $b$  a hőmérséklet függvénye.

Mint az előzőekben is jeleztük, nagyobb nyomások esetén a van der Waals-féle egyenlet mennyiségileg nem ad elfogadható eredményt, ugyanakkor kvalitatíve helyesen írja le a valóságos gázok viselkedését is. Ebben az esetben a (4.30) mint közelítő, félempirikus összefüggés kezelendő

Van der Waals egyenletén kívül sok empirikus és félempirikus valóságos gáz állapotegyenletet javasoltak. Ezekben az egyenletekben a tapasztalati állandók számának növelésével jobb egybeesés mutatkozott meg a kísérleti eredményekkel, mint van der Waals egyenleténél. Ugyanakkor a van der Waals-egyenletet – egyszerűségének és a benne szereplő állandók világos fizikai tartalmának köszönhetően – a legelterjedtebben használják a valóságos gázok és folyadékok viselkedésének minőségi analizisére.

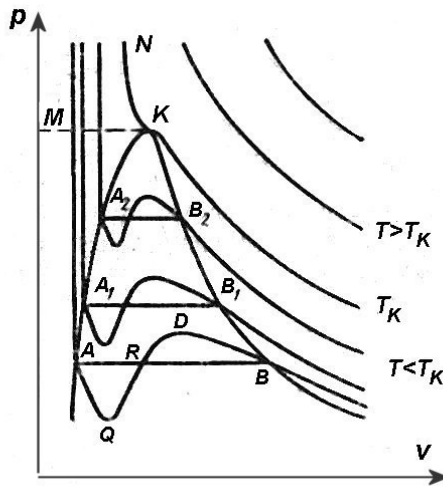
### 4.3.3. A van der Waals-egyenlet gyökeinek elemzése

A van der Waals-egyenlet a fajtérfogatra nézve harmadfokú:

$$v^3 - \left(b + \frac{RT}{p}\right)v^2 + \frac{a}{p}v - \frac{ab}{p} = 0, \quad (4.31)$$

melynek három gyöke van a következő kombinációkban:

- három különböző valós gyök,
- három egymással megegyező valós gyök,
- egy valós két komplex gyök, ahol az utóbbiak fizikailag nem értelmezhetők.



4.9. ábra - Van der Waals-izotermák

Vegyünk fel különböző nyomásokat és a (4.31) egyenletet megoldva néhány kiválasztott, de állandó hőmérsékletre a 4.9. ábrán látható módon izotermákat építhetünk fel.

Mint látható, a

- $T < T_k$  tartományban minden izotermán van egy nyomástartomány, melyben a (4.31) egyenlet három valós gyökkel rendelkezik (a legalsó izotermán  $v_A$ ,  $v_R$ ,  $v_B$ ). Az  $A$  pont telített (forrásban lévő) folyadék,  $B$  száraz telített gőz állapot. Az  $AQ$  szakasz a túlhevített folyadék  $DB$  a túlhűtött gőz metastabil állapota. A  $QRD$  szakasz nem realizálható, mert elentmond a termodinamikai stabilitás  $[(dp/dv)_{T=átl} < 0]$  feltételének. Az  $AB$  egyenes a telített folyadék – száraz telített gőz fázisátalakulás vonala. Az  $MK$  vonal (kritikus izobár) a folyadék tartomány feltételes felső határa.

-  $T = T_k$  esetben az izotermán egy inflexiós pont van és az ehhez a ponthoz húzott érintő vízszintes. Itt a három valós gyök megegyezik egymással. (Kritikus pont)

-  $T > T_k$  esetben bármilyen nyomásra a (4.31) egyenlet csak egy valós gyökkel (térfogat) rendelkezik. A  $BKN$  vonaltól jobbra található a túlhevített gőz tartomány.

## 5. A belső energia kinetikai értelmezése

### 5.1. Az ideális gáz molekuláinak közepes kinetikai energiája

Mivel a hőmérséklet a gáz viszonylag könnyen mérhető makroszkopikus jellemzője, a (2.27) egyenlet alapján határozzuk meg  $\bar{e}_{kin}$  értékét

$$\bar{e}_{kin} = \bar{w}_{kinhal} = \beta T$$

A (3.3) összefüggésből kifejezhető a  $\beta$  értéke

$$\beta = \frac{3}{2}k = 2,07 \cdot 10^{-23} \text{ (J/K)}. \quad (5.1)$$

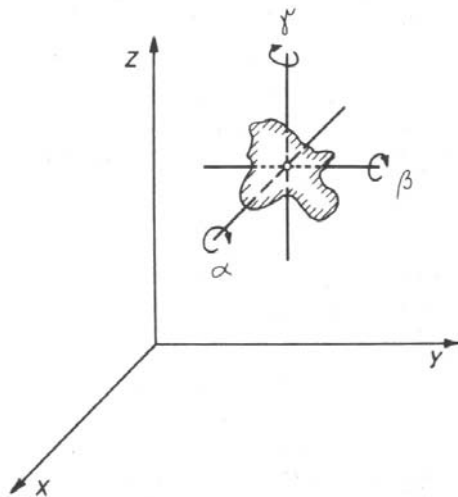
A molekula átlagos mozgási energiája tehát

$$\bar{e}_{kin} = \frac{3}{2}kT \quad (5.2)$$

### 5.2. Az ideális gáz belső energiája

Megjegyezzük, hogy eddig a molekulát anyagi pontnak tekintettük, így kinetikai energiája csak haladó mozgásból származhatott. Az (5.2) kifejezésből következik, hogy az ideális gáz molekuláinak haladó mozgásából számított közepes kinetikai energiája csak az abszolút hőmérséklettől függ, mégpedig arányos azzal.

Az ideális gáz molekulái között vonzóerő nincs, így nem rendelkeznek potenciális energiával. Ezért a molekula összenergiája csak a haladó és forgó mozgásokból eredő kinetikai energiából áll. Ahhoz, hogy a forgómozgásból származó energiát is figyelembe tudjuk venni, be kell vezetni a szabadságfok fogalmát.



**5.1. ábra - A szilárd test szabadságfokai**

Egy test szabadságfokán (5.1. ábra) a test lehetséges térbeli mozgását meghatározó, egymástól független koordináták számát értjük. Általános esetben a test mozgása a térben 6 független koordinátával határozható meg: három lineáris ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) és három szögkoordinátával ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ). Eszerint az általánosan mozgó testnek hat szabadságfoka van.

Ha a test mozgásának szabadsága korlátozva van, akkor szabadságfo-

ka hatnál kevesebb. Mivel a molekulák mozgásának teljes rendezetlensége miatt minden mozgástípus (haladó, forgó) egyformán valószínű, ezért a molekula mozgásának minden szabadságfokára közepesen azonos energiamennyiség jut. (Ez az *ekvipartíció* tétele néven ismertté vált, Boltzmanntól származó tétel az energia szabadságfokonkénti egyenletes eloszlásáról [5].)

A molekulák szabadságfoka a molekulát felépítő atomok számától függ. Az egyatomos gázok molekulái (pl. He) felfoghatók, mint anyagi pontok, melyeknek saját tengelye körüli forgása nem változtatja meg a molekula térbeli helyzetét. Tehát az egyatomos molekulák szabadságfoka három. Ez fizikailag azzal magyarázható, hogy az egyatomos molekulák esetében a forgómozgásra (a forgási szabadságfokokra) végtelen kis energia jut.

A kétatomos gáz molekulája (pl.  $O_2$ ) mint két anyagi pont (atom) együttesen fogható fel, amelyek merev kémiai kötésben állnak egymással (5.2/a. ábra).

Az ilyen molekula két atomon átmenő tengely körüli forgására az előző esethez hasonlóan végtelen kis energia jut, ez a forgás nem változtatja meg a molekula helyzetét a térben. Ezért a kétatomos molekula 5 szabadságfokkal rendelkezik (három haladó mozgás és két forgó mozgás). A három és többatomos molekulák hat szabadságfokúak (három haladó és három forgó mozgás 5.2/b. ábra).

A kinetikai energia (5.2) szerinti kifejezése egyatomos molekulára (anyagi pontra) érvényes, amely 3 szabadságfokkal rendelkezik. Az ekvipartíció tétele értelmében az egy szabadságfokra eső közepes kinetikai energia:

$$\bar{e}_0 = \frac{\bar{e}_{kin}}{3} = \frac{1}{2}kT, \quad (5.3)$$

míg az  $f$  szabadságfokkal rendelkező molekula teljes kinetikai energiája

$$\bar{e} = f\bar{e}_0 = \frac{f}{2}kT. \quad (5.4)$$

Ezzel – bár továbbra is ideális gázzal beszélünk - egy egyszerűsítő feltételt megszüntettünk. A többatomos gázok molekuláit nem mint anyagi pontokat, hanem mint anyagi pontok rendszereit vizsgáltuk.

Az (5.4) egyenlet szerint az egyatomos gázok molekuláinak ( $f = 3$ ) teljes közepes kinetikai energiája

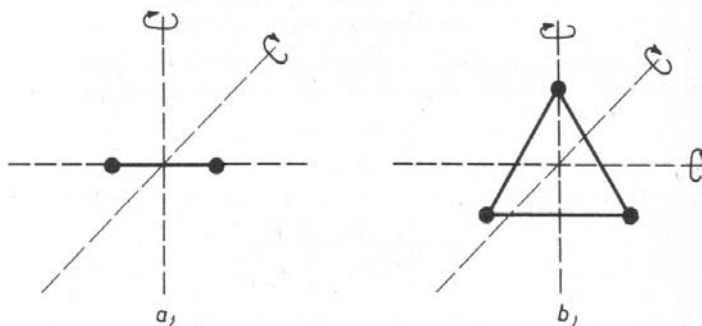
$$\bar{e}_1 = \frac{3}{2}kT; \quad (5.5)$$

a kétatomos gázoké ( $f = 5$ );

$$\bar{e}_2 = \frac{5}{2}kT; \quad (5.6)$$

míg a három és annál többatomos gázoké ( $f = 6$ )

$$\bar{e}_3 = 3kT. \quad (5.7)$$



**5.2. ábra A két- (a) és háromatomos (b) molekula modellje**



Valamilyen  $m$  tömegű ideális gáz  $U$  belső energiáját megkapjuk ha az  $m$  tömegben lévő molekulák számát ( $N$ ) megszorozzuk egy molekula átlagos teljes energiájával:

$$U = N \frac{f}{2} kT = Nm' \frac{f}{2} \frac{1}{m'} kT = m \frac{f}{2} RT . \quad (5.8)$$

Következésképpen, *az ideális gáz belső energiája arányos a felépítő molekula szabadságfokával, az abszolút hőmérséklettel és a tömeggel.*

A belső energia SI egysége a  $J$  (Joule).

Látható, hogy adott gázra a belső energia csak az abszolút hőmérséklettől függ. Az (5.8) levezetésénél fontos körülmény volt, hogy a belső energia számításánál csak a molekulák haladó és forgó mozgásának kinetikai energiáját vettük figyelembe. Ez kizárólag ideális gázoknál indokolható, amelyek molekulái az ütközésen kívül semmiféle egyéb kölcsönhatást nem gyakorolnak egymásra.

A valóságos gázok belső energiájának nyilvánvalóan tartalmaznia kell a molekulák közt működő van der Waals vonzóerők vagy a taszító jellegű valenciaerők jelenléte miatt meglévő potenciális energiát is, amely a 4.2. ábrán szemléltetett erőtvény alapján beláthatóan nagymértékben függ a molekulák közepes távolságától, s azon keresztül a gáz nyomásától is.

Valóságos gázoknál a belső energia (5.8) kifejezését csak aszimptotikus érvényűnek szabad tekinteni, amely annál inkább jelent jobb közelítést, minél inkább növekszik a molekulák közepes távolsága.

Mondjuk tehát ki, hogy *a valóságos gázok belső energiája ellentétben az ideális gázok belső energiájával nem csak a gáz abszolút hőmérsékletének, hanem a nyomásának is függvénye.*

## 6. Hőmennyiség, hőkapacitás, fajhő

A rendszer és környezete közötti kölcsönhatás egyik formája (hőmérséklet különbség hatására) a molekulák rendezetlen energiájának – a *hőnek* – az átvitele. Az így átszármaztatott energiát mérő mennyiség a *hőmennyiség* ( $Q$ ).

A folyamat során bevezetett vagy elvont hőmennyiség és a bekövetkező hőmérsékletváltozás hányadosa (az 1 K hőmérsékletváltozáshoz szükséges hőmennyiség) a *hőkapacitás*

$$C = \frac{Q}{t_2 - t_1} \quad \left[ \frac{J}{K} \right]. \quad (6.1)$$

*Fajhő* az a hőmennyiség, amelyik egységnyi anyagmennyiség (tömeg, térfogat, kilomol) hőmérsékletét 1 Kelvinnel megnöveli, vagyis az egységnyi anyagmennyiség hőkapacitása.

### 6.1. A fajhők típusai a vonatkoztatási anyagmennyiség egysége szerint

Attól függően, hogy milyen egységben mérjük az anyagmennyiséget megkülönböztetünk

-tömegegységre

$$c = \frac{C}{m} \quad \left[ \frac{J}{kgK} \right], \quad (6.2)$$

-térfogategységre (a vonatkoztatási hőmérséklet és nyomás megadandó!)

$$c' = \frac{C}{V} \quad \left[ \frac{J}{m^3 K} \right], \quad (6.3)$$

-kilomolra

$$c_M = \frac{C}{\mu} \quad \left[ \frac{J}{kmol K} \right] \quad (6.4)$$

vonatkozó fajhőt. Ez utóbbit kilomolhőnek is nevezzük.

## 6.2. A fajhők átszámítása

Mivel a hőkapacitás rendre

$$C = mc, \quad (6.5)$$

$$C = Vc', \quad (6.6)$$

$$C = \mu c_M \quad (6.7)$$

a fajhők átszámítására a (6.5)-(6.7) összefüggések alapján írható:

- a tömegegységre és térfogategységre vonatkozó fajhők között

$$Vc' = mc, \quad \text{melyből} \quad c' = c\rho. \quad (6.8)$$

Itt a sűrűség a vonatkoztatási hőmérséklet és nyomás

(pl.  $p_N = 101325 \text{ Pa}$ ,  $T_N = 273,15 \text{ K}$ ) alapján számítandó.

- A tömegegységre és kilomolra vonatkozó fajhők között

$$\mu c_M = mc, \quad \text{melyből} \quad c_M = Mc, \quad (6.9)$$

- a térfogategységre és kilomolra vonatkozó fajhők között

$$\mu c_M = Vc', \quad \text{melyből} \quad c' = \frac{\mu c_M}{V} = \frac{c_M}{V_M}. \quad (6.10)$$

## 6.3. Fajhők a hőközlési folyamat sajátossága szerint

Attól függően, hogy a hőközlés (hőelvonás) milyen folyamat során történik, gázok esetében a fajhő értéke más és más lesz. Azaz a folyamatok szerint végtelen sokféle fajhő lehetséges. Az állandó nyomáson (izobár) és állandó térfogaton (izochor) lejátszódó folyamatokra vonatkozó fajhők a gázok alapvető fizikai jellemzői. A következő táblázat mutatja e kétféle (izochor és izobár) fajhő különböző egységekre vonatkozó jelölését.

Fajhő vonatkoztatása	Tömegegységre	Térfogategységre	Kilomolra
Állandó nyomásra (izobár)	$c_p$	$c'_p$	$c_{Mp}$
Állandó térfogatra (izochor)	$c_v$	$c'_v$	$c_{Mv}$

Az állandó nyomáson érvényes fajhő mindig nagyobb az állandó térfogatra érvényesnél.

A tömegegységre vonatkozó fajhők különbsége ideális gázok esetén Mayer egyenlete szerint a specifikus gázállandó

$$c_p - c_v = R. \quad (6.11)$$

Az izobár és izochor kilomolhők különbsége az univerzális gázállandó, vagyis minden gázra nézve ugyanakkora

$$c_{Mp} - c_{Mv} = R_M. \quad (6.12)$$

A térfogategységre vonatkozó fajhők különbsége

$$c'_p - c'_v = R\rho \quad (6.13)$$

Mivel valóságos gázoknál az izobár folyamatban közölt hő – a hőmérsékletváltozáson túlmenően – nem csak térfogatváltozási (külső), hanem a molekulák közötti vonzóerő legyőzésére (belső) munkavégzésre is fordítódik

$$c_p - c_v > R. \quad (6.14)$$

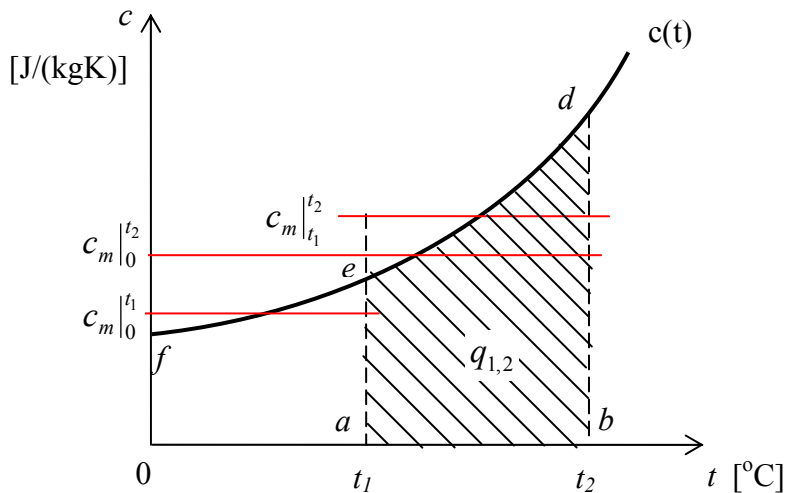
#### 6.4. Valódi és közepes fajhő

A folyamat során egységnyi munkaközeggel közölt vagy elvont elemi hőmennyiség és az ennek hatására bekövetkező végtelen kis hőmérsékletváltozás hányadosa a valódi fajhő (a továbbiakban a tömegegységre vonatkoztatottat részletezzük)

$$c = \frac{\delta q}{dt}. \quad (6.15)$$

A folyamattal kapcsolatos hőmennyiség

$$Q_{1,2} = m \int_{t_1}^{t_2} c dt. \quad (6.16)$$



**6.1. ábra - A valódi fajhő hőmérsékletfüggése**

A  $t_1 \div t_2$  hőmérséklet határok között az egységnyi tömegű munkaközeggel közölt hőmennyiség

$$q_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} c dt . \quad (6.17)$$

A 6.1. ábra vonalkázott területe téglalappá alakítható, melynek magassága a  $t_1 \div t_2$  hőmérséklet tartományban érvényes közepes fajhő  $c_m|_{t_1}^{t_2}$ .

Mellyel a hőmennyiség

$$q_{1,2} = c_m|_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1), \quad (6.18)$$

azaz a közepes fajhő ismeretében az integrálás nem szükséges.

A közepes fajhő

$$c_m|_{t_1}^{t_2} = \frac{q_{1,2}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c dt . \quad (6.19)$$

A (6.19) egyenletben az integrál parciálisan is vehető

$$q_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} c dt = \int_0^{t_2} c dt - \int_0^{t_1} c dt = c_m \Big|_0^{t_2} t_2 - c_m \Big|_0^{t_1} t_1 \quad (6.20)$$

és a 6.1. ábra alapján is írható

$q_{1,2} \cong$  terület  $(a-b-d-e-a) =$  terület  $(0-b-d-f-0) -$  terület  $(0-a-e-f-0)$

vagyis

$$q_{1,2} = c_m \Big|_0^{t_2} t_2 - c_m \Big|_0^{t_1} t_1. \quad (6.21)$$

A  $0 \div t$  hőmérséklet tartományban érvényes  $c_m \Big|_0^t$  közepes fajhő megfelelő táblázatból vehető (pl. [17]).

A (6.21) kifejezést (6.19)-be helyettesítve, a  $t_1 \div t_2$  tartományban érvényes közepes fajhő

$$c_m \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{c_m \Big|_0^{t_2} t_2 - c_m \Big|_0^{t_1} t_1}{t_2 - t_1}. \quad (6.22)$$

### A hőmennyiség számítására szolgáló összefüggések:

Valódi fajhő polinomos megadása esetén

$$Q_{1,2} = m \int_{t_1}^{t_2} c dt. \quad (6.23)$$

A  $t_1 \div t_2$  hőmérséklet tartományban megadott közepes fajhő esetén

$$Q_{1,2} = m c_m \Big|_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1). \quad (6.24)$$

A táblázatból vehető  $0 \div t_1$  és  $0 \div t_2$  hőmérséklet tartományra vonatkozó közepes fajhők esetén

$$Q_{1,2} = m \left( c_m \Big|_0^{t_2} t_2 - c_m \Big|_0^{t_1} t_1 \right). \quad (6.25)$$

Térfogategységre vonatkozó fajhők ismeretében analóg összefüggések alkalmazhatók az  $m$  tömeg helyett  $V$  térfogat helyettesítéssel. Pl. a  $0 \div t$  hőmérséklet tartományban térfogategységre vonatkozó közepes fajhők ismeretében a számítási kifejezés a következő alakú lesz

$$Q_{1,2} = V \left( c'_m \Big|_0^{t_2} t_2 - c'_m \Big|_0^{t_1} t_1 \right). \quad (6.26)$$

Kilomolra vonatkozó fajhők (kilomolhők) ismeretében a (6.23)-(6.25) egyenletekkel analóg összefüggések alkalmazhatók az  $m$  tömeg helyett  $\mu$  kilomolszám helyettesítéssel. Pl. a  $t_1 \div t_2$  hőmérséklet tartományban érvényes közepes kilomolhő ismeretében a számítási kifejezés a következő alakú lesz

$$Q_{1,2} = \mu c_{Mm} \Big|_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1). \quad (6.27)$$

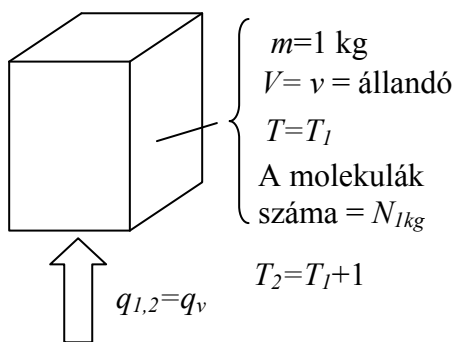
Az adiabatikus kitevő a  $t_1 \div t_2$  hőmérséklet tartományban lejátszódó folyamatoknál változó fajhő esetén mint a megfelelő izobár és izochor fajhők hányadosa

$$\kappa \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{c_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2}}{c_{vm} \Big|_{t_1}^{t_2}} = \frac{c'_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2}}{c'_{vm} \Big|_{t_1}^{t_2}} = \frac{c_{Mpm} \Big|_{t_1}^{t_2}}{c_{Mvm} \Big|_{t_1}^{t_2}}. \quad (6.28)$$

## 6.5. A fajhő fizikai tartalma

Fajhő az a hőmennyiség, amelyik egységnyi anyagmennyiség hőmérsékletét 1 Kelvinnel megnöveli.

### 6.5.1. Az ideális gáz fajhője



**6.2. ábra - Egységnyi tömegű rendszer izochor hevítése**

Az egységnyi tömegű gázzal állandó térfogaton 1 K hőmérsékletnövekedésig közölt hő (6.2. ábra) – definíció szerint – a  $c_v$  izochor fajhő.

A közölt hő megváltoztatja a rendszer teljes energiáját

$$q_v = c_v = E_2 - E_1. \quad (6.29)$$

A rendszer teljes energiája az átlagos teljes energia és a molekulák számának szorzatával egyenlő, vagyis

$$E = N_{1kg} \frac{f}{2} kT = \frac{f}{2} RT, \quad (6.30)$$

$$c_v = E_2 - E_1 = \frac{f}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{f}{2} R \quad (6.31)$$

Az állandó nyomáson vett (izobár) fajhő Mayer egyenlete felhasználásával

$$c_p = c_v + R = \frac{f+2}{2} R. \quad (6.32)$$

Vagyis az ideális gáz izochor és izobár fajhője csak a gáz minemiségétől és a molekula szabadságfokától függ.

Az adiabatikus kitevő

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}. \quad (6.33)$$

Tehát az egyatomos gázok esetében

$$c_v = \frac{3}{2} R, \quad (6.34)$$

kéttatomos gázoknál

$$c_v = \frac{5}{2} R, \quad (6.35)$$

három és többatomos gázoknál

$$c_v = 3R. \quad (6.36)$$

Ez a különbség azzal magyarázható, hogy míg az egyatomos ideális gázok molekulái csak haladó mozgással rendelkeznek, a többatomosoknál megjelenik a forgómozgás is.

### 6.5.2. Valóságos gázok fajhője

Az egyatomos gázoknál a kapott eredmény jól egybeesik a mérési eredményekkel teljes hőmérséklet tartományban. Pl a hélium esetében a  $c_v$  értéke

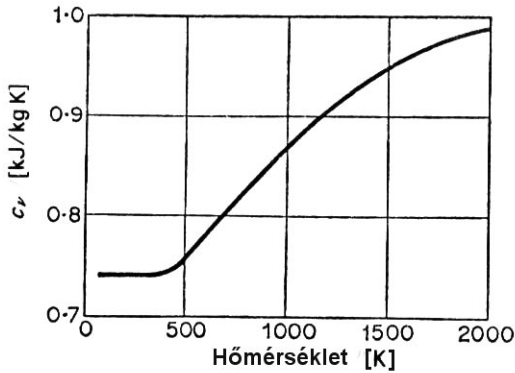
$$c_v = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} \frac{R_M}{M_{He}} = \frac{3}{2} \frac{8314}{4} = 3118 \text{ J/(kmol K)},$$

a kéttatomos nitrogén esetében a (6.35) képlet



$$c_v = \frac{5}{2} R = \frac{3}{2} \frac{R_M}{M_{N_e}} = \frac{3}{2} \frac{8314}{28} = 742 \text{ J}/(\text{kmol K})$$

értéket ad, amely széles hőmérséklettartományban (kb. 400 K-ig) vi-



**6.3. ábra - Nitrogén  $c_v$  fajhőjének változása a hőmérséklet függvényében [27]**

szonylag jól egybeesik a mérési eredményekkel, ezen hőmérséklet fölött a  $c_v$  fokozatosan nő a hőmérséklettel (6.3. ábra).

A merev kötésekkel modellezett molekulák tehát csak az egyatomos gázok esetében szolgáltatnak jó eredményt. Kéttomos gázoknál ez az elképzelés csak meghatározott hőmérséklet-tartományban kielégítő.

Az eltérés még nagyobb a három- és többatomos gázok esetében. A többatomos gázok többségénél ezt az elméletet nem támasztják alá a kísérleti eredmények. Például az etilalkohol gőze ( $C_2H_6O$ ) esetében a  $c_v$  értéke közel van a  $8R$ -hez szemben az elmélet által számítható  $3R$  értékkel.

Ezt a fajhőnövekedést nem lehet a klasszikus mechanikán alapuló kinetikus gázelmélet alapján indokolni, viszont a kvantumelmélet kielégítő magyarázattal szolgál.

Az eltérés oka az, hogy meghatározott feltételek esetén a molekulák nem merev, hanem rugalmas képződményként viselkednek és a rugalmas molekulák a haladó és forgó mozgás mellett lengési (rezgési) szabadságfokokkal is rendelkeznek. Tehát az ilyen molekulák esetében nem csak haladó és forgó mozgást kell figyelembe venni, hanem az atomok molekulán belüli lengőmozgását is.

Az atomok lengőmozgásának energiáját a fajhő kvantumelmélete alapján határozhatjuk meg. Ezen elmélet szerint a két- és többatomos gázok fajhője a hőmérséklet függvénye, mivel az atomok lengőmozgásának energiája függ a hőmérséklettől.

Ha a molekula olyan  $Z$  db atomból épül fel, melyek nem rendelkeznek merev kapcsolattal (azaz a molekula rugalmas), az összes szabadságfok száma  $3Z$  (minden atom helyzetét 3 koordinátával határozzuk meg). A molekula 3 haladó, valamint forgási, és lengési szabadságfokokkal rendelkezik. Általános esetben a szabadságfokokra a következő összefüggés írható fel:

$$3Z = f_{\text{haladó}} + f_{\text{forgási}} + f_{\text{lengési}} = 3 + f_{\text{forgási}} + f_{\text{lengési}}. \quad (6.37)$$

A lengési szabadságfokok száma

$$f_{\text{lengési}} = 3Z - 3 - f_{\text{forgási}}. \quad (6.38)$$

A lengési szabadságfokokra kétszer annyi energia jut, mint a haladó vagy forgó mozgásra. Ez utóbbiak csak mozgási energiával rendelkeznek, míg a rezgő mozgásnak kinetikus és potenciális energiája is van. Ezek közepes értéke harmonikus lengésnél azonos. Ennek megfelelően a lengési szabadságfokra  $kT$  energia jut.

Az egy molekulára jutó közepes energia ennek figyelembe vételével

$$\bar{e} = (3 + f_{\text{forgási}}) \frac{kT}{2} + f_{\text{lengési}} kT = (3 + f_{\text{forgási}} + 2f_{\text{lengési}}) \frac{kT}{2}$$

a (6.38) behelyettesítésével

$$\bar{e} = (6Z - 3 - f_{\text{forgási}}) \frac{kT}{2}. \quad (6.39)$$

Az ilyen gáz belső energiája a molekula átlagos energiájának és a molekulaszám szorzataként adódik. Egységnyi tömegű gázt véve

$$u = \bar{e} N_{1\text{kg}} = (6Z - 3 - f_{\text{forgási}}) \frac{RT}{2}, \quad (6.40)$$

állandó térfogaton vett fajhője a belső energia hőmérséklet szerinti deriváltja

$$c_v = \frac{du}{dT} = (6Z - 3 - f_{\text{forgási}}) \frac{R}{2}. \quad (6.41)$$

A 6.4. ábrán a kétatomos gáz izochor fajhőjének változását láthatjuk a hőmérséklet függvényében. A forgómozgás energiája kis hőmérsékleten elenyésző. Hidrogén esetében a forgómozgás energiája  $\sim 175$  K hőmérsékleten, oxigénél  $\sim 780$  K hőmérsékleten kezd jelentőssé válni.

A molekulák nagy hőmérsékleteken rugalmas képződményként viselkednek. A rezgőmozgás megjelenési hőmérséklete több ezer Kelvin. (H<sub>2</sub> esetén ~6000 K, O<sub>2</sub> esetén ~2250 K) [31].

A (6.41) összefüggés a többatomos gázok többségénél rendkívül magas fajhő értékeket ad. Például az etilalkohol gőze (C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>O) esetében a  $c_v$  értéke közel van a 8R-hez szemben a (6.41) szerint számítható 24R értékkel.

Továbbra sem világos, miért viselkednek ezek a gázok egy hőmérséklet tartományban úgy, mint merev, míg másik hőmérséklet tartományban, mint rugalmas rendszerek?

A bonyolult molekulák ilyen tulajdonságára ad magyarázatot a kvantumelmélet.

A fajhő kvantumelmélete azon a feltételezésen alapul, hogy az ilyen lengőrendszer (oszcillátor) energiája csak diszkrét értékeket vehet fel, amikor a két szomszédos érték különbsége állandó és az energia kvantummal egyenlő, vagyis

$$\Delta E = h \nu, \quad (6.42)$$

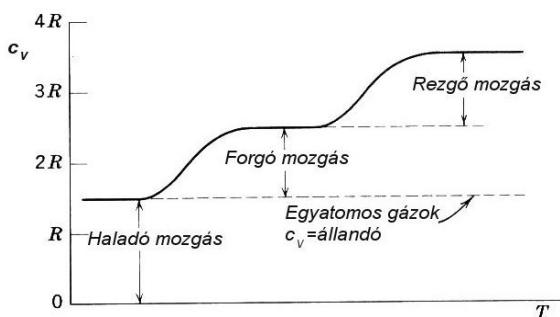
ahol  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  – a Planck-féle állandó.[5]

Az oszcillátor energiájának lehetséges értékei

$$E = h \nu \left( \frac{1}{2} + n \right), \quad (6.43)$$

ahol  $n=0, 1, 2, 3, \dots$  az oszcillátor energiaszintjét jellemző lengési kvantumszám [11], [31].

A (6.43) egyenletből következik, hogy a kvantumszám egységgel történő



**6.4. ábra - A  $c_v$  változása a kinetikus fajhőelmélet alapján**

megváltozásakor az oszcillátor  $h \nu$  energiát kap, vagy ad le.

$n = 0$  esetén

$$E = E_0 = \frac{1}{2} h \nu \text{ - ez az}$$

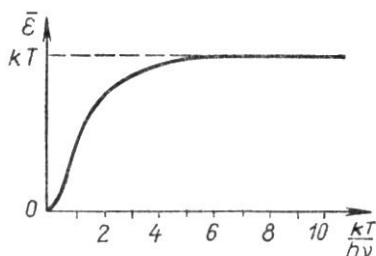
oszcillátor nulladik lengésének energiája.

Ekkora energiája az oszcillátornak általában

nem gerjesztett állapotában van, és ez nem tűnik el 0 K esetén sem. Vegyünk egy gázt, melynek minden egyes molekulája  $j$  lengési szabadságfokkal rendelkezik. Minden lengési szabadságfok helyettesíthető egy oszcillátorral, melyek frekvenciája általános esetben lehet különböző. Így a rugalmas molekula egy  $j$  oszcillátorból álló rendszerből áll, mely oszcillátorok  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_j$  frekvenciával rendelkeznek.

Amennyiben a gáz  $N$  molekulát tartalmaz, akkor abban  $N$  db azonos frekvenciájú oszcillátor van. Az összes oszcillátor száma  $jN$  lesz. Minden egyes oszcillátor energiája a (6.43) értékének bármelyike lehet. Ezen kívül a molekulák hőmozgás következtében lejátszódó ütközése az oszcillátorok energiájának meghatározott kvantumszámú megváltozását idézheti elő. Amennyiben kiválasztunk  $N$  db. azonos ( $\nu$ ) frekvenciájú oszcillátort és feltételezzük, hogy kvantumszámuk  $0 \div \infty$  tartományban változik, az egy oszcillátora jutó – a nulladik lengés nélküli – közepes energia

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (6.44)$$



**6.5. ábra - Az  $\bar{\varepsilon}$  közepes energia változása [11]**

lesz [5], [11], [31]. A képletből látható, hogy az oszcillátor közepes energiája nem csak a hőmérséklettől, hanem a frekvenciától is függ. Vagyis az oszcillátorok nem egyenrangúak az energia-eloszlás tekintetében (a kisebb frekvenciájú oszcillátorok könnyebben gerjesztődnek, mivel az energia kvantumuk kisebb értékű).

A (6.44) szerint kis hőmérsékleten (amikor  $h\nu/kT \gg 1$ )  $\rightarrow \bar{\varepsilon} = 0$ .

Nagyon nagy hőmérsékleten ( $h\nu \ll kT$  esetben)  $\frac{h\nu}{kT}$  zérushoz tart.

Sorbafejtéssel

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 + \dots \approx 1 + \frac{h\nu}{kT},$$

és a (6.44) egyenlet szerint  $\bar{\varepsilon} \approx kT$ . Az  $\bar{\varepsilon}$  változását szemlélteti a 6.5. ábra.

A kétatomos gáz egy molekulájára jutó átlagos energia, mint a haladó és forgó mozgásokra, valamint a molekulán belüli lengőmozgásra jutó energiák összege (Einstein egyenlete)

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon} = \frac{5}{2}kT + \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (6.45)$$

1 kg gáz belső energiája

$$u = \bar{\varepsilon}N_{1kg} = \frac{5}{2}RT + N_{1kg} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (6.46)$$

Az izochor fajhőt a belső energia hőmérséklet szerinti deriváltjaként határozzuk meg:

$$c_v = \frac{du}{dT}, \quad (6.47)$$

vagyis

$$c_v = \frac{5}{2}R + R \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2}, \quad (6.48)$$

ha  $\frac{h\nu}{kT} \ll 1 \rightarrow c_v \approx \frac{7}{2}R$ , ha  $\frac{h\nu}{kT} \gg 1 \rightarrow c_v \approx \frac{5}{2}R$ .

Einstein egyenlete az izochor fajhőre tetszés szerinti atomszámú molekula esetén

$$c_v = \frac{f_1}{2}R + \sum_1^{f_2} R \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2}, \quad (6.49)$$

ahol  $f_1$  – a haladó és forgó molekuláris mozgás szabadságfoka;  $f_2$  – a molekulán belüli lengőmozgás szabadságfoka.

### Példa (1):

Egy kompresszor adiabatikusan sűrít 60kg/s levegőt, miközben a levegő hőmérséklete 300 °C-ról 750 °C-ra nő. Határozza meg a sűrítés teljesítményigényét és a nyomásviszonyt, ha a fajhő a következő módon függ a hőmérséklettől  $c_p = 0,998 + 2,24 \cdot 10^{-4}t - 2,92 \cdot 10^{-8}t^2$  kJ/(kg K),  $[t] = ^\circ\text{C}$ ,  $R = 287$  J/(kg K),  $(c_2 \approx c_1)$ .

### Megoldás:

$$P = \dot{m}w_{t1,2} = \dot{m}(i_2^* - i_1^*) = \dot{m}(i_2 - i_1).$$

A fajhő hőmérsékletfüggése esetén

$$P = \dot{m} \int_{t_1}^{t_2} c_p dt = \dot{m} \int_{t_1}^{t_2} (0,998 + 2,24 \cdot 10^{-4}t - 2,92 \cdot 10^{-8}t^2) dt$$

$$P = \dot{m} \left( 0,998(t_2 - t_1) + \frac{2,24 \cdot 10^{-4}}{2}(t_2^2 - t_1^2) - \frac{2,92 \cdot 10^{-8}}{3}(t_2^3 - t_1^3) \right) =$$
$$= 60 \left( \begin{array}{l} 0,998(750 - 300) + \frac{2,24 \cdot 10^{-4}}{2}(750^2 - 300^2) - \\ - \frac{2,92 \cdot 10^{-8}}{3}(750^3 - 300^3) \end{array} \right) = 29890 \text{ kW}.$$

A sűrítés nyomásviszonya

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \text{ ahol } \kappa = \kappa_m \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{c_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2}}{c_{vm} \Big|_{t_1}^{t_2}} = \frac{c_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2}}{c_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2} - R},$$

$$c_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{q_{1,2}}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} c_p dt}{t_2 - t_1} = \frac{29890}{60 \cdot (750 - 300)} = 1,107;$$

$$\kappa = \frac{c_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2}}{c_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2} - R} = \frac{1,107}{1,107 - 0,287} = 1,35.$$

A nyomásviszony

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left( \frac{1023}{573} \right)^{\frac{1,35}{1,35-1}} = 9,352.$$

**Példa (2):**

Egy dízelmotor hengerében a levegőt adiabatikusan sűrítjük az tüzelőanyag gyulladási hőmérsékletéig (800 °C). Hányadrészére csökken a térfogat?  $t_1 = 100$  °C. a)  $\kappa = f(T)$ ; b)  $\kappa = 1,4 = \text{const}$ .

**Megoldás:**

A térfogatviszonyt Poisson-egyenletből határozhatjuk meg:

$$\frac{v_1}{v_2} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad \text{ahol } \kappa = \kappa_m \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{c_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2}}{c_{vm} \Big|_{t_1}^{t_2}}.$$

A közepes fajhők

$$c_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{c_{pm} \Big|_0^{t_2} t_2 - c_{pm} \Big|_0^{t_1} t_1}{t_2 - t_1}, \quad c_{vm} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{c_{vm} \Big|_0^{t_2} t_2 - c_{vm} \Big|_0^{t_1} t_1}{t_2 - t_1}.$$

Táblázatból ([17] Függelék F.5. táblázat).

$$c_{pm} \Big|_0^{t_2} = 1,071 \text{ kJ}/(\text{kgK}), \quad c_{pm} \Big|_0^{t_1} = 1,006 \text{ kJ}/(\text{kgK}),$$

$$c_{vm} \Big|_0^{t_2} = 0,7842 \text{ kJ}/(\text{kgK}), \quad c_{vm} \Big|_0^{t_1} = 0,7193 \text{ kJ}/(\text{kgK}),$$

$$c_{pm} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{c_{pm} \Big|_0^{t_2} t_2 - c_{pm} \Big|_0^{t_1} t_1}{t_2 - t_1} = \frac{1,071 \cdot 800 - 1,006 \cdot 100}{800 - 100} = 1,0803 \text{ kJ}/(\text{kgK}),$$

$$c_{vm} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{c_{vm} \Big|_0^{t_2} t_2 - c_{vm} \Big|_0^{t_1} t_1}{t_2 - t_1} = \frac{0,7842 \cdot 800 - 0,7193 \cdot 100}{800 - 100} = 0,7935 \text{ J}/(\text{kgK}).$$

A közepes adiabatikus kitevő

$$\kappa = \kappa_m \Big|_{100}^{800} = \frac{c_{pm} \Big|_{100}^{800}}{c_{vm} \Big|_{100}^{800}} = \frac{1,0803}{0,7935} = 1,3615.$$

A térfogatviszony a fajhő hőmérsékletfüggése esetén

$$\frac{v_1}{v_2} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left( \frac{1073}{373} \right)^{\frac{1}{0,3615}} = 18,59.$$

A térfogatviszony állandó fajhő esetén

$$\frac{v_1}{v_2} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left( \frac{1073}{373} \right)^{\frac{1}{0,4}} = 14,035.$$

Az eredményekből látható, hogy a fajhő hőmérsékletfüggésének elhanyagolása jelentős hibát eredményezhet.



## 7. A termodinamika első főtétele

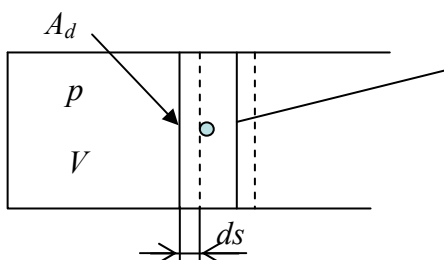
### 7.1. Zárt rendszer

#### 7.1.1. Zárt rendszer munkája

A henger, dugattyú és hengerfej által határolt zárt rendszer (7.1. ábra) elemi munkája

$$\delta W = -pA_d ds = -pdV ,$$

ahol a mínusz előjel azt jelzi, hogy a munkát a rendszer végzi a környezetén (előjel szabályunk szerint).



7.1. ábra - A henger, dugattyú és hengerfej által határolt zárt rendszer

Az 1-2 folyamat során végzett munka

$$W_{1,2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV . \quad (7.1)$$

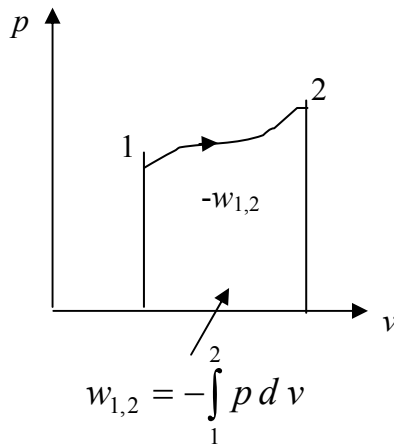
A zárt rendszer munkáját térfogatváltozási, illetve fizikai munkának is nevezzük. A fajlagos térfogatváltozási munka

$$w_{1,2} = \frac{W_{1,2}}{m} = - \int_{v_1}^{v_2} p dv . \quad (7.2)$$

Az elemi fajlagos térfogatváltozási munka

$$\delta w = -p dv . \quad (7.3)$$

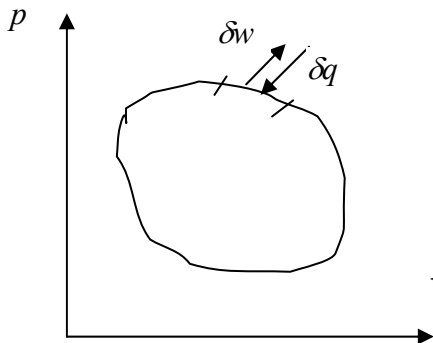
A (7.2) egyenlet szerint értelmezett térfogatváltozási munka a  $p - v$  diagramban a folyamat görbéje alatti területként ábrázolható (7.2. ábra).



7.2. ábra - Térfogatváltozási munka a p - v diagramban

### 7.1.2. Belső energia

Amennyiben a rendszer körfolyamatot valósít meg (7.3. ábra), a körfolyamatra alkalmazva az energiamegmaradás törvényét



$$\oint (\delta q + \delta w) = 0. \quad (7.4)$$

A jelölt kifejezés teljes differenciál, vagyis egy új állapotjelző – a belső energia ( $u$ ) – elemi változása ( $du$ ).

7.3. ábra - Elemi folyamat a zárt rendszer körfolyamatában

Ezzel

$$du = \delta q + \delta w, \quad (7.5)$$

mely a termodinamika első főtételének zárt rendszerre érvényes egyenletének differenciális alakja.

Integrálás után megkapjuk a termodinamika első főtételének zárt rendszerre érvényes egyenletének egyik integrál alakját:

$$u_2 - u_1 = q_{1,2} + w_{1,2}. \quad (7.6)$$

A rendszer belső energiáján a rendszerhatáron belüli molekulák összes (kinetikus és potenciális) energiájának összegét értjük.

Alkalmazzuk ezt az egyenletet olyan folyamatra, melynek során a térfogat nem változik.

Ekkor  $q_{12} = c_v(T_2 - T_1)$ ,  $w_{1,2} = 0$ . Behelyettesítve (7.6)-ba, kapjuk

$$u_2 - u_1 = q_{1,2} + w_{1,2} = c_v(T_2 - T_1). \quad (7.7)$$

Amennyiben a (7.6) egyenletet  $p = \text{állandó}$  folyamatra alkalmazzuk,

$$q_{12} = c_p(T_2 - T_1) \quad \text{vagy} \quad w_{12} = -\int p dv = -p(v_2 - v_1) = -R(T_2 - T_1).$$

Melyeket (7.6) egyenletbe behelyettesítve, kapjuk

$$u_2 - u_1 = q_{1,2} + w_{1,2} = c_p(T_2 - T_1) - R(T_2 - T_1) = c_v(T_2 - T_1). \quad (7.8)$$

A két különböző, egymástól független folyamat azonos eredményt adott, így megállapíthatjuk, hogy ideális gáz esetén a belsőenergia-változás, mint az állandó térfogaton vett fajhő és a hőmérsékletváltozás szorzata határozható meg:

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1). \quad (7.9)$$

Az elemi belsőenergia-változás differenciálás után

$$du = c_v dT. \quad (7.10)$$

Az első főtétel zárt rendszerre érvényes összefüggései tehát a következők:

$$u_2 - u_1 = q_{1,2} + w_{1,2} = q_{1,2} - \int_1^2 p dv. \quad (7.11)$$

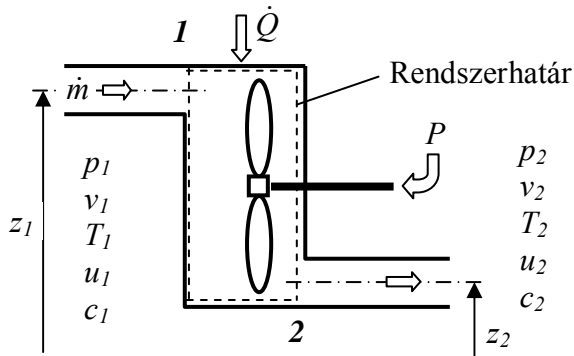
Differenciál alakban a fenti egyenlet

$$du = \delta q + \delta w = \delta q - p dv. \quad (7.12)$$

## 7.2. Nyitott rendszer

### 7.2.1. A nyitott rendszer munkája

Legyen vizsgálatunk tárgya a 7.4. ábra szerinti nyitott rendszer.



7.4.ábra - Nyitott rendszer kölcsönhatásokkal

A bevezetett teljesítmény  $P = \dot{m} w_{1,2}$ ,

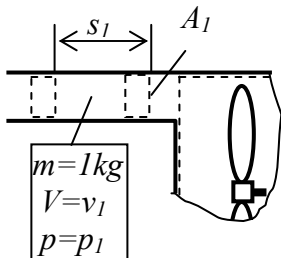
mozgási energia  $E_{kinetikus} = \frac{\dot{m} c^2}{2}$ ,

potenciális energia  $E_{potenciális} = \dot{m} g z$ ,

belső energia  $U = \dot{m} u$ ,

hőmennyiség  $\dot{Q} = \dot{m} q_{1,2}$ .

### A munkaközeg mozgatására fordított munka



Vizsgáljuk 1kg munkaközeg rendszerbe történő betolására fordított munkát (7.5. ábra).

A képzeletbeli  $A_1$  felületű dugattyú 1 kg munkaközeg  $s_1$  úton történő eltolására fordított munka (a környezet végzi)

$$w_{betolási} = p_1 A_1 s_1 = p_1 v_1. \quad (7.13)$$

### 7.5. ábra - Betolási munka

Hasonló módon kaphatjuk meg az 1kg munkaközeg rendszerből történő kitolá-

sához szükséges munkát a (rendszer végzi)

$$W_{\text{kitolási}} = p_2 v_2. \quad (7.14)$$

A két munka előjelhelyes összege az áttolási munka a rendszer szempontjából

$$W_{\text{áttolási}} = p_2 v_2 - p_1 v_1. \quad (7.15)$$

$$\text{Belépő energiák} = E_{\text{kinetikus1}} + E_{\text{potenciális1}} + U_1 + W_{\text{betolási}} + \dot{Q} + P. \quad (7.16)$$

$$\text{Kilépő energiák} = E_{\text{kinetikus2}} + E_{\text{potenciális2}} + U_2 + W_{\text{kitolási}}. \quad (7.17)$$

*Az energiamegmaradás törvénye szerint a belépő energiák összege megegyezik a kilépő energiák összegével*

$$\begin{aligned} \dot{m} \frac{c_1^2}{2} + \dot{m} g z_1 + \dot{m} u_1 + \dot{m} p_1 v_1 + \dot{m} q_{1,2} + \dot{m} w_{1,2} &= \\ = \dot{m} \frac{c_2^2}{2} + \dot{m} g z_2 + \dot{m} u_2 + \dot{m} p_2 v_2. & \end{aligned} \quad (7.18)$$

A (7.18) egyenletet  $\dot{m}$  tömegárammal elosztva és a nyitott rendszer munkáját ( $w_{1,2}$ ) kifejezve kapjuk

$$w_{1,2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + u_2 - u_1 - q_{1,2} + p_2 v_2 - p_1 v_1. \quad (7.19)$$

Az első főtétel zárt rendszerre levezetett egyenlete, mint matematikai összefüggés alapján

$$w_{1,2} = u_2 - u_1 - q_{1,2}. \quad (7.20)$$

Továbbá felhasználva az

$$\int_1^2 d(pv) = p_2 v_2 - p_1 v_1 \quad (7.21)$$

azonosságot, kapjuk

$$w_{1,2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + w_{1,2} + \int_1^2 d(pv). \quad (7.22)$$

Másrészt, mivel

$$w_{1,2} = -\int_1^2 p dv, \quad (7.23)$$

illetve

$$\int_1^2 d(pv) = \int_1^2 p dv + \int_1^2 v dp = \int_1^2 v dp - w_{1,2}, \quad (7.24)$$

a (7.22) egyenlet a

$$w_{t1,2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 v dp \quad (7.25)$$

alakot ölti. Az általunk vizsgált termodinamikai rendszerekben a potenciális energia változása elhanyagolható, így a *nyitott rendszer munkája* – a *technikai munka*

$$w_{t1,2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \int_1^2 v dp \quad (7.26)$$

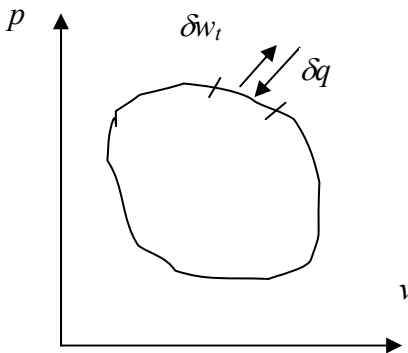
alakú összefüggéssel határozható meg.

Az elemi technikai munkát a (7.26) egyenlet deriválásával kapjuk meg

$$\delta w_t = c dc + v dp \quad (7.27)$$

### 7.2.2. Torlóponti entalpia, statikus entalpia

Amennyiben a rendszer körfolyamatot valósít meg (7.6. ábra), a körfolyamatra alkalmazva az energiamegmaradás törvényét, írhatjuk



7.6. ábra - Elemi folyamat a nyitott rendszer körfolyamatában

$$\oint (\delta q + \delta w_t) = 0. \quad (7.28)$$

A jelölt kifejezés teljes differenciál, vagyis egy új állapotjelző – a **torlóponti (teljes vagy összes) entalpia** ( $i^*$ )- elemi változása ( $di^*$ ).

Ezzel

$$\delta q + \delta w_t = di^* , \quad (7.29)$$

mely a termodinamika első főtételének nyitott rendszerre érvényes egyenletének egyik differenciális alakja.

Integrálás után megkapjuk a termodinamika első főtételének nyitott rendszerre érvényes egyenletének egyik integrál alakját:

$$i_2^* - i_1^* = q_{1,2} + w_{t1,2} . \quad (7.30)$$

A (7.29) egyenletbe behelyettesítve az elemi munka (7.27) kifejezését

$$\delta q + cdc + vdp = di^* , \quad (7.31)$$

melyből

$$\underbrace{\delta q + vdp}_{\nearrow} = di^* - cdc . \quad (7.32)$$

Ez a kifejezés is teljes differenciál, mivel közvetlenül integrálható, vagyis az egyenlet bal oldala egy új állapotjelző – a *statikus entalpia* vagy általában használatos nevén az *entalpia* ( $i$ ) – elemi változása ( $di$ )

$$di = di^* - cdc , \quad (7.33)$$

illetve

$$\delta q + vdp = di . \quad (7.34)$$

Ez a termodinamika első főtételének nyitott rendszerre érvényes egyenletének másik differenciális alakja.

Integrálás után

$$i_2 - i_1 = q_{1,2} + \int_{p_1}^{p_2} vdp \quad (7.35)$$

megkapjuk termodinamika első főtételének nyitott rendszerre érvényes egyenletének másik integrál alakját.

A *statikus entalpia fizikai tartalma* a (7.34) egyenletből vezethető le, ha behelyettesítjük az elemi hőmennyiségnek az első főtétel zárt rendszerre érvényes alakjából származtatott

$$\delta q = du + pdv \quad (7.36)$$

kifejezését. Ezzel

$$du + pdv + vdp = di, \quad (7.37)$$

$$d(u + pv) = di, \quad (7.38)$$

melyből

$$i = u + pv + \text{állandó}. \quad (7.39)$$

Az entalpia ( $i$ ) a belsőenergiának és annak a munkának az összege, melyet arra kell fordítani, hogy az  $u$  belsőenergiájú  $v$  térfogatú rendszert a  $p$  nyomású térbe juttassuk.

Az entalpia – mint állapotjelző – általánosságban felírható, mint másik két állapotjelző függvénye:

$$i = f_1(T, p), \quad i = f_2(T, v), \quad i = f_3(p, v).$$

Az entalpiaváltozás a (7.39) egyenlet alkalmazásával

$$i_2 - i_1 = u_2 + p_2 v_2 - (u_1 + p_1 v_1),$$

melyet átrendezve

$$i_2 - i_1 = u_2 - u_1 + p_2 v_2 - p_1 v_1. \quad (7.40)$$

Ideális gáz esetén a belsőenergia-változás és az állapotegyenlet helyettesítésével:

$$i_2 - i_1 = c_v(T_2 - T_1) + R(T_2 - T_1) = c_p(T_2 - T_1). \quad (7.41)$$

Ideális gáz esetén tehát az entalpia csak a hőmérséklettől függ. Az elemi entalpiaváltozás

$$di = c_p dT. \quad (7.42)$$

A torlóponti és statikus entalpia kapcsolatát a (7.33) összefüggésből kapjuk, melyet integrálva

$$i_2 - i_1 = i_2^* - i_1^* - \left( \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} \right), \quad (7.43)$$

$$i^* = i + \frac{c^2}{2}. \quad (7.44)$$



*A torlóponyi (lefékezett, megállított vagy teljes) entalpia ( $i^*$ ) – a statikus entalpia ( $i$ ) és a makroszkópikus mozgási energia összege.*

*A torlóponyi entalpia így a mozgó közeg (gáz) összenergia tartalmát fejezi ki.*

Behelyettesítve a torlóponyi entalpiát az (7.18) egyenlet tömegárammal elosztott alakjába, kapjuk

$$\underbrace{u_1 + p_1 v_1 + \frac{c_1^2}{2}}_{i_1^*} + g z_1 + q_{1,2} + w_{t1,2} = \underbrace{u_2 + p_2 v_2 + \frac{c_2^2}{2}}_{i_2^*} + g z_2, \quad (7.45)$$

illetve a potenciális energiaváltozást elhanyagolva ezúton is megkapjuk az első főtétel nyitott rendszerre érvényes (7.30) alakját.

Az első főtétel nyitott rendszerre érvényes összefüggései tehát a következők:

$$i_2^* - i_1^* = q_{1,2} + w_{t1,2}, \quad (7.46)$$

$$i_2 - i_1 = q_{1,2} + \int_1^2 v dp. \quad (7.47)$$

Differenciál alakban a fenti egyenletek az alábbiak:

$$di^* = \delta q + \delta w_t, \quad (7.48)$$

$$di = \delta q + v dp. \quad (7.49)$$

A termodinamika első főtétele tulajdonképpen a természet objektív törvényének – az energia-megmaradás törvényének – alkalmazása termikus folyamatokra. Azt fejezi ki, hogy a folyamat munkája és a folyamattal kapcsolatos hőmennyiség egymással ekvivalens.

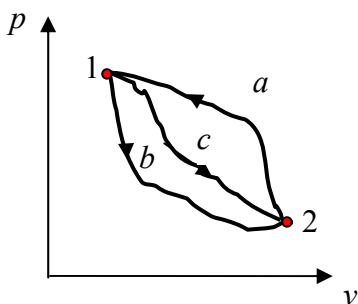
Zárt rendszerben lejátszódó folyamat során a rendszer belső energiája hőcsere, illetve munkavégzés hatására – a két kölcsönhatás energiamérlegének megfelelő mértékben – változik meg.

Nyitott rendszer esetében a termodinamika első főtétele azt fejezi ki, hogy a nyitott rendszer torlóponyi entalpiája a rendszer és környezete közötti hőcsere és technikai munkavégzés hatására – a két kölcsönhatás energiamérlegének megfelelő mértékben – változik meg.

### Példa (1):

Az 1-c-2 folyamat során 80 kJ hőt közlünk, 30 kJ munkát nyerünk. Mennyi hőt kell közölni az 1-b-2 folyamat során 10 kJ munka nyerése céljából. Mennyi hőt kell közölni, vagy elvonni a 2-a-1 folyamatban, ha közben kompresszióra 50 kJ munkát fordítunk?

### Megoldás:



Felírjuk a termodinamika első főtételét (zárt rendszer) az 1-c-2 folyamatra:

$$U_2 - U_1 = Q_{1c2} + W_{1c2},$$

melyből a belsőenergia-változás az 1 és 2 állapotok között

$$U_2 - U_1 = 80 - 30 = 50 \text{ kJ}.$$

Mivel az 1 és 2 állapotok nem változnak a belső energia (állapotjelző) változás állandó marad.

A termodinamika első főtétele a 1-b-2 folyamatra:

$$U_2 - U_1 = Q_{1b2} + W_{1b2},$$

melyből

$$Q_{1b2} = U_2 - U_1 - W_{1b2} = 50 + 10 = 60 \text{ kJ}.$$

Tehát a folyamat során 60 kJ hőt kell bevezetni a rendszerbe.

A termodinamika első főtétele a 2-a-1 folyamatra:

$$U_1 - U_2 = Q_{2a1} + W_{2a1},$$

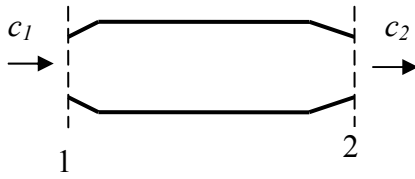
melyből

$$Q_{2a1} = U_1 - U_2 - W_{2a1} = -50 - 50 = -100 \text{ kJ},$$

vagyis 100 kJ hőt elvonunk a folyamat során.

### Példa (2):

Egy kompresszorban súrlódásmentesen állandósult üzemmóddal 1,5 kg/s levegőt sűrítünk  $p_1=1$  bar  $t_1=127$  °C állapotról  $p_2=1,5$  bar nyomásra. A sűrítés során  $p(v+0,574) = \text{állandó}$ , ahol  $v$  m<sup>3</sup>/kg-ban,  $p$  Pa-ban értendő. A belépési sebesség 100 m/s, míg a kilépési 200 m/s. Határozza meg a sűrítési teljesítményigényt és a hőmennyiséget.  $R = 287$  J/(kg K),  $\kappa=1,4$ .

**Megoldás:**

A sűrítés teljesítményigénye:

$$P = \dot{m} w_{t12}.$$

A technikai munka

$$w_{t1,2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \int_1^2 v dp.$$

Mivel a sűrítés során  $p(v + 0,574) = \text{const} = K$ ,

$$\text{melyből} \quad v = \frac{K}{p} - 0,574.$$

A  $K$  állandó értékét az 1. állapot jellemzőiből határozhatjuk meg:

$$K = p(v + 0,574) = RT_1 + 0,574 p_1 = 287 \cdot 400 + 0,574 \cdot 10^5 = 172200 \text{ J/kg}$$

Ezzel

$$\int_1^2 v dp = \int_1^2 \left( \frac{K}{p} - 0,574 \right) dp = K \ln \frac{p_2}{p_1} - 0,574(p_2 - p_1) =$$

$$= 172200 \ln \frac{1,5}{1} - 0,574(1,5 - 1)10^5 = 41121 \text{ J/kg}$$

$$w_{t1,2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \int_1^2 v dp = \frac{200^2 - 100^2}{2} + 41121 = 56121 \text{ J/kg}.$$

A teljesítményigény

$$P = \dot{m} w_{t12} = 1,5 \cdot 56121 = 84181 \text{ W} = 84,181 \text{ kW}.$$

A folyamattal kapcsolatos hőmennyiséget az első főtétel nyitott rendszerre érvényes alakjából határozzuk meg:

$$q_{1,2} = i_2 - i_1 - \int_1^2 v dp = c_p(T_2 - T_1) - \int_1^2 v dp.$$

A végállapot hőmérsékletét a folyamat egyenletéből számítjuk:

$$K = p(v + 0,574) = p_2(v_2 + 0,574) = RT_2 + 0,574 p_2,$$

illetve

$$T_2 = \frac{K - 0,574 p_2}{R} = \frac{172200 - 0,574 \cdot 1,5 \cdot 10^5}{287} = 300 \text{ K}.$$

A fajhő

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R = \frac{1,4}{1,4 - 1} 287 = 1004,5 \text{ J/(kgK)}.$$

A fajlagos, illetve a folyamattal kapcsolatos hőmennyiség

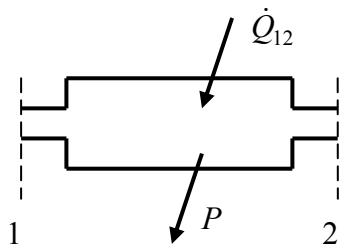
$$q_{1,2} = c_p (T_2 - T_1) - \int_1^2 v dp = 1004,5(300 - 400) - 41121 = -141621 \text{ J / kg ,}$$

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m} q_{1,2} = -1,5 \cdot 141621 = -212431 \text{ W} = -212,431 \text{ kW} .$$

### Példa (3):

Egy energetikai egység teljesítménye  $P=375 \text{ kW}$ . A belépő levegő jellemzői  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $t_1 = 27 \text{ }^\circ\text{C}$ . A belépési keresztmetszet  $A_1 = 0,12 \text{ m}^2$ . A kilépő közeg állapotjelzői  $p_2 = 1,8 \text{ bar}$ ,  $t_2 = 153 \text{ }^\circ\text{C}$ . A kilépési keresztmetszet  $A_2 = 0,1 \text{ m}^2$ , melyben a sebesség  $119 \text{ m/s}$ . A munkaközeg levegőnek tekintve határozza meg a bevezetésre kerülő hőmennyiséget, valamint a munkaközeg tömegáramát.  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ ,  $\kappa = 1,4$ .

### Megoldás:



A termodinamika első főtétele az adott nyitott rendszerre:

$$i_2^* - i_1^* = q_{1,2} + w_{t1,2} ,$$

melyből a hőmennyiség

$$q_{1,2} = i_2^* - i_1^* - w_{t1,2} .$$

A torlóponti entalpiaváltozás

$$i_2^* - i_1^* = c_p (T_2 - T_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} .$$

A fajlagos technikai munka (negatív – mivel a rendszer végzi)

$$w_{t1,2} = -\frac{P}{\dot{m}} .$$

A tömegáram a kontinuitás törvényéből

$$\dot{m} = \rho_2 c_2 A_2 = 1,472 \cdot 119 \cdot 0,1 = 17,517 \text{ kg / s} .$$

Ahol a sűrűség

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{1,8 \cdot 10^5}{287 \cdot 426} = 1,472 \text{ kg / m}^3 ,$$

$$w_{t1,2} = -\frac{P}{\dot{m}} = -\frac{375 \cdot 10^3}{17,517} = -1407,8 \text{ J / kg} ,$$

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R = \frac{1,4}{1,4 - 1} 287 = 1004,5 \text{ J/(kgK)}.$$

A  $c_1$  sebesség a kontinuitás törvényéből

$$c_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 A_1} = \frac{17,517}{1,161 \cdot 0,12} = 125,73 \text{ m/s},$$

itt a sűrűség

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{10^5}{287 \cdot 300} = 1,161 \text{ kg/m}^3.$$

A torlóponti entalpiaváltozás

$$i_2^* - i_1^* = c_p (T_2 - T_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = 1004,5(426 - 300) + \frac{119^2 - 125,73^2}{2} = 125680 \text{ J/kg}.$$

A fajlagos hőmennyiség

$$q_{1,2} = i_2^* - i_1^* - w_{i,1,2} = 125680 + 21407 = 147087 \text{ J/kg}.$$

A rendszerbe időegység alatt bevezetett hőmennyiség:

$$\dot{Q}_{1,2} = \dot{m} q_{1,2} = 17,517 \cdot 147087 = 2576523 \text{ J/s} = 2,577 \text{ MJ/s}.$$

### 7.3. Az entrópia

Amennyiben az első főtétel (7.49) egyenletéből kifejezzük az elemi hőmennyiséget, kapjuk

$$\delta q = di - v dp. \quad (7.50)$$

Az elemi hőmennyiség nem teljes differenciál, viszont, ha az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk az abszolút hőmérséklettel

$$\frac{\delta q}{T} = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp, \quad (7.51)$$

a kapott egyenlet jobb oldaláról könnyen beláthatjuk, hogy az teljes differenciál lett. Az állapotegyenletből következőleg  $\frac{v}{T} = \frac{R}{p}$ , ezzel

$$\frac{\delta q}{T} = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}, \quad (7.52)$$

vagyis az egyenlet jobb oldalán teljes differenciál kifejezést kapunk. Ez azt jelenti, hogy az egyenlet bal oldala  $\frac{\delta q}{T}$  is teljes differenciál, ezért ez egy új állapotjelző ( $s$ ) elemi változása

$$ds = \frac{\delta q}{T}, \quad (7.53)$$

illetve integrálva

$$s = \int \frac{\delta q}{T} + \text{állandó}. \quad (7.54)$$

Ez az állapotjelző az *entrópia*. Jele:  $S$ , mértékegysége: J/K.

A fajlagos entrópia jele:  $s$ , dimenziója: J/(kgK).

Képletéből következően az entrópia olyan állapotjelző, amelyik nő akkor, ha hőbevezetés, csökken, ha hőelvonás van az adott (ideális) folyamat során. Nem változik értéke, ha nincs hőcsere a rendszer és környezete között. Valójában az entrópia ennél a formális matematikai értelmezésnél mélyebb fizikai tartalommal rendelkezik, melynek kifejtésére később, a második főtétel tárgyalásakor térünk ki.

Az "S" függvényt először Clausius vezette be 1865-ben, s kezdetben "egyenérték szám", "átalakulási érték" (Clausius) "termodinamikai" függvény (Rankine) elnevezésekkel jelölték. Maga az entrópia elnevezés kb. 140 éve szinte észrevétlenül alakult ki.

A német-görög szótár szerint:

die Verwandlung =  $\varepsilon' \nu \tau \rho \omega \pi \eta'$  = átalakulás, ebből a germánosított Entropie, innen pedig a latinósított entrópia szó származik [6].

Az entrópia extenzív állapotjelző és így additív.

Mértékegysége az alap összefüggés szerint J/K.

Az  $s = S/m$  mennyiséget fajlagos entrópiának nevezzük.

Mértékegysége J/(kgK).

Az ideális gáz entrópiaváltozásának meghatározásához a feltételes nulla értéket általában a fizikai normál állapotban vesszük fel:

( $T_N=273,15$  K,  $p_N=101325$  Pa).

Az entrópia abszolút értékének meghatározása a műszaki hőtanban lényegében nem szükséges. Bennünket csupán az entrópia változása érdekel a

folyamatok során, vagyis az entrópiakülönbség a folyamat vég és kezdeti állapota között. Kivételt képeznek azok az esetek, amikor a termodinamikai egyenleteket kémiai reakciókra alkalmazzuk.

Az entrópia – mint állapotjelző – általánosságban felírható, mint másik két állapotjelző függvénye:

$$s = f_1(T, p), \quad s = f_2(T, v), \quad s = f_3(p, v). \quad (7.55)$$

A (7.52) egyenletet integrálva, kapjuk:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (7.56)$$

Alkalmazva az állapotegyenletet a kezdeti (1) és végállapotra (2)

$$p_2 v_2 = RT_2, \quad p_1 v_1 = RT_1,$$

kifejezzük a  $\frac{p_2}{p_1}$  nyomásviszonyt  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2 v_1}{T_1 v_2}$

és a (7.56) egyenletbe helyettesítjük

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \left( \frac{T_2 v_1}{T_1 v_2} \right) = (c_p - R) \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1},$$

végül

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}. \quad (7.57)$$

Az állapotegyenletekből nyert  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1}$  hőmérsékletviszonyt (7.57)

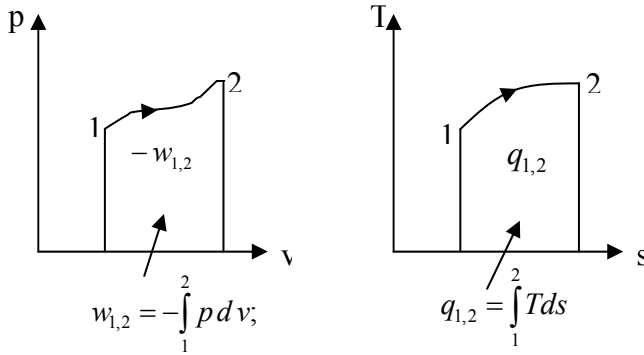
összefüggésbe helyettesítve, kapjuk:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} = (c_v + R) \ln \frac{v_2}{v_1} + c_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{v_2}{v_1} + c_v \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (7.58)$$

A (7.56), (7.57) és (7.58) egyenletek az entrópiaváltozást fejezik ki a termikus állapotjelzők függvényében.

### 7.3.1. T - s diagram



**7.7. ábra - A p - v és T - s diagram**

A fentiekben bevezetett új állapotjelző – az entrópia – definiáló (7.53) képletéből kifejezhetjük az elemi hőmennyiséget:

$$\delta q = T ds , \quad (7.59)$$

melyből a folyamattal kapcsolatos hőmennyiség

$$q_{1,2} = \int_{T_1}^{T_2} T ds . \quad (7.60)$$

Ez a hőmennyiség  $T - s$  koordináta rendszerben mint a folyamat alatti terület jeleníthető meg (hasonlóan a térfogatváltozási munkához a  $p - v$  koordináta rendszerben) (7.7. ábra).

A  $T - s$  diagram a folyamatok termodinamikai analízisének fontos eszköze. Később látni fogjuk, hogy ez a diagram nem csak a folyamattal kapcsolatos hőmennyiség, hanem belsőenergia-, entalpiaváltozás és a munkák szemléltetésére is alkalmas. Így lehetővé teszi folyamatok összehasonlítását, elemzését grafikusán, bonyolult számítások nélkül is.



**Példa:**

Határozza meg a politrópikus kitevő értékét és a fajlagos entrópiaváltozás nagyságát annál a reverzibilis kompressziónál, ahol  $v_1/v_2 = 2$ , a térfogatváltozási munka 300 kJ/kg, az elvont hő pedig 100 kJ/kg. (Zárt rendszer).  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ ;  $\kappa = 1,4$ .

**Megoldás:**

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} = \frac{287}{1,4 - 1} = 717,5 \text{ J/(kgK)},$$

$$c_p = c_v \kappa = 717,5 \cdot 1,4 = 1004,5 \text{ J/(kgK)}.$$

Az első főtétel alapján írhatjuk

$$u_2 - u_1 = q_{1,2} + w_{1,2} = -100 + 300 = 200 \text{ kJ/kg},$$

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) = 200 \text{ kJ/kg},$$

Politrópus hőmennyiség [(9.54) egyenlet]

$$q_{1,2} = c_n (T_2 - T_1) = -100 \text{ kJ/kg}.$$

A két utóbbi egyenletet egymással elosztva kapjuk:

$$\frac{c_v}{c_n} = -2, \quad \text{illetve} \quad c_v = -2c_n.$$

A politrópus fajhő ebből

$$c_n = -\frac{c_v}{2} = -\frac{717,5}{2} = -358,75 \text{ J/(kgK)}.$$

A politrópus kitevő [(9.60) összefüggés]

$$n = \frac{c_p - c_n}{c_v - c_n} = \frac{1004,5 + 358,75}{717,5 + 358,75} = 1,266.$$

Az entrópiaváltozás

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_n dT}{T} = c_n \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{ahol} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} = 2^{0,266} = 1,2025;$$

$$s_2 - s_1 = c_n \ln \frac{T_2}{T_1} = -358,75 \ln 1,2025 = -66,154 \text{ J/(kgK)}.$$

## 8. Gázkeverékek

A gázkeverék különböző gázok (komponensek, alkotók) keveréke, melyek egymással nem lépnek kémiai reakcióba. A keverékben minden gáz tökéletesen megőrzi saját tulajdonságait és úgy viselkedik, mintha egyedül töltené ki a keverék térfogatát.

### Heterogén rendszer.

Gibbs-féle fázis szabály szerint a szabadságfok ( $Sz$  – a megadandó paraméterek száma), a fázisok ( $F$ ) és az alkotók száma ( $A$ ) közötti kapcsolat

$$Sz + F = A + 2. \quad (8.1)$$

Egyfázisú (gáz) többalkotós rendszer esetén a heterogén rendszer szabadságfoka

$$Sz = A + 1. \quad (8.2)$$

vagyis a két állapotjelző mellett szükséges az összetétel megadása is.

*A gázkeveréket ideális gázok keverékének tekintjük és maga is ideális gáz. Ezért az ideális gázokra meghatározott összefüggések (pl. állapotegyenlet) érvényesek a gázkeverékekre is, csak azokba a gázkeverék jellemzőit (gázállandó, fajhők, stb.) kell helyettesíteni.*

### 8.1. A gázkeverék összetételének megadási módjai

#### Tömegarány (tömegtört) szerinti megadás

A gázkeverék tömege, mint az alkotók tömegeinek összege:

$$m_k = m_1 + m_2 + \dots + m_n. \quad (8.3)$$

Az  $i$ -edik alkotó tömegaránya 
$$g_i = \frac{m_i}{m_k}, \quad (8.4)$$

$$\sum_{i=1}^n g_i = 1. \quad (8.5)$$

## Térfogatarány (térfogat tört) szerinti megadás

Az alkotók és a keverék azonos nyomáson és hőmérsékleten veendők.

$$V_k = V_1 + V_2 + \dots + V_n. \quad (8.6)$$

Az  $i$ -edik alkotó térfogataránya  $r_i = \frac{V_i}{V_k}, \quad (8.7)$

$$\sum_{i=1}^n r_i = 1. \quad (8.8)$$

## A tömegarány átszámítása térfogatarányba és fordítva

Az  $i$ -edik komponens tömege a keverék nyomásán és hőmérsékletén érvényes térfogattal számítva

$$m_i = \frac{p_k V_i}{R_i T_k}, \quad (8.9)$$

a keverék tömege

$$m_k = \frac{p_k V_k}{R_k T_k}, \quad (8.10)$$

az  $i$ -edik komponens tömegaránya a keverékben

$$g_i = \frac{m_i}{m_k} = \frac{p_k V_i}{T_k R_i} \frac{T_k R_k}{p_k V_k} = \frac{V_i}{V_k} \frac{R_k}{R_i}. \quad (8.11)$$

Mivel a térfogatokat azonos nyomáson és hőmérsékleten értelmeztük, viszonyuk a térfogatarány ( $r_i$ )

$$g_i = r_i \frac{R_k}{R_i} = r_i \frac{M_i}{M_k}, \quad \text{illetve} \quad r_i = g_i \frac{R_i}{R_k} = g_i \frac{M_k}{M_i}. \quad (8.12)$$

## Kilomol- (mol-) arány (moltört) szerinti megadás

A gázkeverék kilomolszáma megegyezik az alkotók kilomolszámainak összegével

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = \mu_k. \quad (8.13)$$

Az  $i$ -edik alkotó kilomolaránya

$$\frac{\mu_i}{\mu_k} = \frac{m_i}{M_i} \frac{M_k}{m_k} = g_i \frac{M_k}{M_i} = r_i, \quad (8.14)$$

vagyis a kilomolarány – és ez Avogadro törvényéből is következik – megegyezik a térfogataránnyal.

## 8.2. Dalton törvénye, az alkotók parciális nyomása

A gázkeverékre felírt állapotegyenletből, valamint (8.13)-ból következik

$$p_k = \frac{m_k R_k T_k}{V_k} = \frac{\mu_k M_k R_k T_k}{V_k} = \frac{\mu_k R_M T_k}{V_k}, \quad (8.15)$$

$$p_k = \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) R_M T_k}{V_k}, \quad (8.16)$$

mely a következő alakban írható

$$p_k = \frac{\mu_1 R_M T_k}{V_k} + \frac{\mu_2 R_M T_k}{V_k} + \frac{\mu_3 R_M T_k}{V_k} + \dots + \frac{\mu_n R_M T_k}{V_k}. \quad (8.17)$$

Mivel

$$\mu_i R_M = \frac{m_i}{M_i} R_M = m_i R_i,$$

$$p_k = \frac{m_1 R_1 T_k}{V_k} + \frac{m_2 R_2 T_k}{V_k} + \frac{m_3 R_3 T_k}{V_k} + \dots + \frac{m_n R_n T_k}{V_k}, \quad (8.18)$$

ahol

$$\frac{m_i R_i T_k}{V_k} = p_{pi}$$

- az i-edik komponens nyomása a

keverék térfogatában a keverék hőmérsékletén, vagyis a komponens *parciális (rész-)* nyomása. A (8.18) egyenlet tehát a következő alakba írható:

$$p_k = p_{p1}(T_k, V_k) + p_{p2}(T_k, V_k) + \dots + p_{pn}(T_k, V_k). \quad (8.19)$$

Ez Dalton törvénye, mely szerint az ideális gázkeverék nyomása az alkotó gázok nyomásainak összegével egyenlő, amennyiben azok mindegyike egyedül tölti ki a keverék térfogatát a keverék hőmérsékletén.

Írjuk fel az állapotegyenletet az  $i$ -edik komponensre, amennyiben az egyedül tölti ki a keverék térfogatát a keverék hőmérsékletén

$$p_{pi} V_k = m_i R_i T_k. \quad (8.20)$$

A keverékre felírt állapotegyenlet

$$p_k V_k = m_k R_k T_k. \quad (8.21)$$

A (8.20) egyenletet (8.21) egyenlettel elosztva kapjuk

$$\frac{p_{pi}}{p_k} = \frac{m_i R_i}{m_k R_k} = r_i, \quad (8.22)$$

vagyis az alkotó parciális nyomásának és a keverék nyomásának aránya megegyezik a térfogataránnyal, melyből

$$p_{pi} = r_i p_k. \quad (8.23)$$

### 8.3. A gázkeverék gázállandója

Az (8.5) egyenlet szerint

$$g_1 + g_2 + \dots + g_n = 1. \quad (8.24)$$

A tömegarányokat a térfogatarányokkal kifejezve

$$r_1 \frac{R_k}{R_1} + r_2 \frac{R_k}{R_2} + \dots + r_n \frac{R_k}{R_n} = 1, \quad (8.25)$$

melyből

$$\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} + \dots + \frac{r_n}{R_n} = \frac{1}{R_k}. \quad (8.26)$$

ezzel a gázkeverék gázállandója térfogatarány szerinti megadás esetén

$$R_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{R_i}}. \quad (8.27)$$

Amennyiben a (8.8) egyenletből indulunk ki

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1, \quad (8.28)$$

$$g_1 \frac{R_1}{R_k} + g_2 \frac{R_2}{R_k} + \dots + g_n \frac{R_n}{R_k} = 1, \quad (8.29)$$

$$R_k = g_1 R_1 + g_2 R_2 + \dots + g_n R_n. \quad (8.30)$$

Végül megkapjuk a gázkeverék gázállandójának meghatározására szolgáló kifejezést, ha az alkotók tömegarányai adottak

$$R_k = \sum_{i=1}^n g_i R_i. \quad (8.31)$$

#### 8.4. Gázkeverék látszólagos (átlagos) molekulatömege

A

$$g_1 + g_2 + \dots + g_n = 1 \quad (8.32)$$

egyenletből kiindulva, majd a tömegarányokat térfogatarányokkal helyettesítve

$$r_1 \frac{M_1}{M_k} + r_2 \frac{M_2}{M_k} + \dots + r_n \frac{M_n}{M_k} = 1$$

a keverék látszólagos (átlagos) molekulatömege az alkotók molekulatömegeinek kilomolarány (térfogatarány) szerint súlyozott középértéke lesz

$$M_k = \sum_{i=1}^n r_i M_i. \quad (8.33)$$

Hasonlóan járunk el a térfogatarányok összegének egyenletéből

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1, \quad (8.34)$$

$$g_1 \frac{M_k}{M_1} + g_2 \frac{M_k}{M_2} + \dots + g_n \frac{M_k}{M_n} = 1, \quad (8.35)$$

$$\frac{1}{M_k} = \frac{g_1}{M_1} + \frac{g_2}{M_2} + \dots + g_n \frac{g_n}{M_n}, \quad (8.36)$$

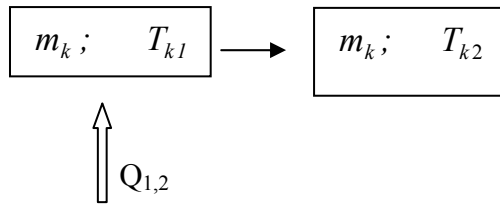
$$M_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{M_i}}. \quad (8.37)$$

A gázkeverék gázállandója a keverék látszólagos molekulatömege segítségével is számítható

$$R_k = \frac{R_M}{M_k}. \quad (8.38)$$

## 8.5. Gázkeverék fajhői

Az  $m_k$  tömegű gázkeverékkel valamilyen állapotváltozás során közöljünk  $Q$  hőmennyiséget. Eközben a keverék hőmérséklete  $T_{k1}$ -ről  $T_{k2}$ -re változik, és az alkotók (tömegeik:  $m_i$ , fajhők:  $c_i$ ) is ugyanolyan állapotváltozást szenvednek, mint a keverék (pl. izochor vagy izobar vagy politrópikus stb.).



### 8.1. ábra - Hőközlési folyamat a keverékkel

A közölt hőmennyiség  $Q_{1,2} = m_k c_k (T_{k2} - T_{k1}). \quad (8.39)$

A gázkeverék komponenseinek hőmérséklete megegyezik a keverékével, ezért írhatjuk

$$Q_{1,2} = m_1 c_1 (T_{k2} - T_{k1}) + m_2 c_2 (T_{k2} - T_{k1}) + \dots + m_n c_n (T_{k2} - T_{k1}) \quad (8.40)$$

A két egyenlet egybevetéséből következik:

$$m_k c_k = m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_n c_n = \sum_{i=1}^n m_i c_i . \quad (8.41)$$

Ebből a keverék tömegegységre vonatkoztatott fajhője az alkotók fajhőinek tömegarány szerint súlyozott átlaga

$$c_k = \sum_{i=1}^n g_i c_i . \quad (8.42)$$

Hasonlóképpen határozható meg a keverék kilomolhője, mint a kilomolarány (moltört) szerint súlyozott középérték

$$c_{Mk} = \sum_{i=1}^n r_i c_{Mi} \quad (8.43)$$

vagy a térfogategységre vonatkoztatott keverék fajhő, mint az alkotók ugyanilyen fajhőinek térfogatarány szerint súlyozott átlaga

$$c'_k = \sum_{i=1}^n r'_i c'_i . \quad (8.44)$$

Ezek a kifejezések érvényesek mind a valódi, mind a közepes fajhőkre.

## 8.6. A gázkeverék belső energiája és entalpiája

A gázkeverék, – mint ideális gáz – belső energiája egyenlő az alkotók belső energiáinak összegével.

$$U_k = U_1 + U_2 + \dots + U_n , \quad (8.45)$$

$$m_k u_k = m_1 u_1 + m_2 u_2 + \dots + m_n u_n , \quad (8.46)$$

melyből a keverék belső energiájának fajlagos értéke egyenlő az alkotók fajlagos belső energiáinak tömegarány szerint súlyozott középértékével:

$$u_k = \sum_{i=1}^n g_i u_i . \quad (8.47)$$

Hasonló módon határozhatjuk meg a gázkeverék entalpiáját, mint az alkotók entalpiáinak összegét:

$$I_k = I_1 + I_2 + \dots + I_n , \quad (8.48)$$



$$m_k i_k = m_1 i_1 + m_2 i_2 + \dots + m_n i_n, \quad (8.49)$$

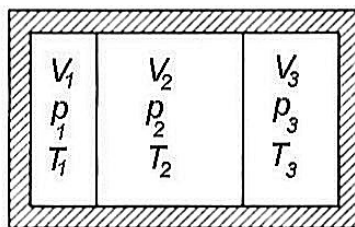
$$i_k = \sum_{i=1}^n g_i i_i. \quad (8.50)$$

Eddig a kész gázkeverék jellemzőinek meghatározásával foglalkoztunk. A továbbiakban a különböző gázok keveredési folyamatának számításával – a létrejött keverék jellemzőinek meghatározásával foglalkozunk.

## 8.7. Ideális gázok adiabatikus keveredése

### 8.7.1. Keveredés zárt rendszerben

A keveredés előtt a gázkeverék alkotói a 8.2. ábra szerinti elrendezésben egy szigetelt edényben vannak. A keveredést a válaszfalak eltávolításával valósítjuk meg.



8.2 ábra - Gázkeverék komponensek keveredés előtt zárt rendszerben

A keverék tömege egyenlő az alkotók tömegeinek összegével

$$m_k = m_1 + m_2 + \dots + m_n. \quad (8.51)$$

Amennyiben a térfogatok összegződnek

$$V_k = V_1 + V_2 + \dots + V_n. \quad (8.52)$$

Az energiamegmaradás törvénye

$$U_k = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (8.53)$$

Amennyiben a belsőenergiák nullértékét 0 K-nél tűzzük ki, írható

$$m_k c_{vk} T_k = m_1 c_{v1} T_1 + m_2 c_{v2} T_2 + \dots + m_n c_{vn} T_n, \quad (8.54)$$

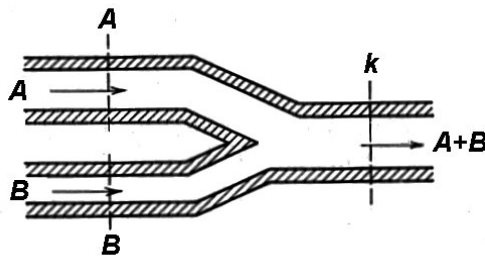
melyből a keverék hőmérséklete

$$T_k = \frac{m_1 c_{v1} T_1 + m_2 c_{v2} T_2 + \dots + m_n c_{vn} T_n}{m_k c_{vk}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i c_{vi} T_i}{\sum_{i=1}^n m_i c_{vi}}, \quad (8.55)$$

a keverék nyomása az állapotegyenletből

$$p_k = \frac{m_k R_k T_k}{V_k}. \quad (8.56)$$

### 8.7.2. Keveredés nyitott rendszerben



**8.3 ábra - Gázkeverék komponensek keveredése nyitott rendszerben**

Két alkotóra végezve a levezetést, először felírjuk a tömegáram megmaradás törvényét (8.3. ábra)

$$\dot{m}_k = \dot{m}_A + \dot{m}_B, \quad (8.57)$$

majd az energiamegmaradás egyenletét

$$\dot{m}_k i_k^* = \dot{m}_A i_A^* + \dot{m}_B i_B^*, \quad (8.58)$$

ahol

$$i^* = i + \frac{c^2}{2} = c_p T + \frac{c^2}{2} = c_p T^*, \quad (8.59)$$

$$T^* = T + \frac{c^2}{2c_p}. \quad (8.60)$$

Behelyettesítve (8.58)-ba

$$\dot{m}_k \left( c_{pk} T_k + \frac{c_k^2}{2} \right) = \dot{m}_A \left( c_{pA} T_A + \frac{c_A^2}{2} \right) + \dot{m}_B \left( c_{pB} T_B + \frac{c_B^2}{2} \right) \quad (8.61)$$

vagy

$$\dot{m}_k c_{pk} T_k^* = \dot{m}_A c_{pA} T_A^* + \dot{m}_B c_{pB} T_B^*. \quad (8.62)$$

Melyből a keverék torlóponyi hőmérséklete

$$T_k^* = \frac{\dot{m}_A c_{pA} T_A^* + \dot{m}_B c_{pB} T_B^*}{\dot{m}_k c_{pk}}, \quad (8.63)$$

illetve általában

$$T_k^* = \frac{\sum_{i=1}^n \dot{m}_i c_{pi} T_i^*}{\dot{m}_k c_{pk}}. \quad (8.64)$$

Elhanyagolható sebességek esetén

$$T_k = \frac{\sum_{i=1}^n \dot{m}_i c_{pi} T_i}{\dot{m}_k c_{pk}}. \quad (8.65)$$

## 8.8. Entrópiaváltozás a keveredés során

A keveredés során bekövetkező entrópiaváltozás egyenlő az alkotók entrópiaváltozásainak összegével.

Az alkotók jellemzőinek megváltozását a következő táblázatban foglaltuk össze:

Komponensek jellemzői		
Keveredés előtt	Keveredés után	
Tömeg	$m_i$	$m_i$
Nyomás	$p_i$	$p_{pi}$
Térfogat	$V_i$	$V_k$
Hőmérséklet	$T_i$	$T_k$

Az egyes alkotók keveredés során bekövetkező entrópiaváltozásait az ideális gázokra levezetett

$$\Delta S_i = f_1(T, V) = f_2(T, p) = f_3(p, V)$$

összefüggések valamelyikével határozhatjuk meg. A legkézenfekvőbbnek a

$$\Delta S_i = m_i \left( c_{vi} \ln \frac{T_k}{T_i} + R_i \ln \frac{V_k}{V_i} \right) \quad (8.66)$$

kifejezés tűnik.

Ezzel az entrópiaváltozás a keveredés során:

$$\Delta S_k = \sum_{i=1}^n m_i \left( c_{vi} \ln \frac{T_k}{T_i} + R_i \ln \frac{V_k}{V_i} \right). \quad (8.67)$$

Hasonlóan járhatunk el a  $\Delta S_i = f_2(T, p)$ , vagy  $\Delta S_i = f_3(p, V)$  függvénykapcsolatok választása esetén is, de szem előtt kell tartani, hogy az alkotó nyomása a keveredés után a parciális nyomás.

$$\Delta S_k = \sum_{i=1}^n m_i \left( c_{vi} \ln \frac{T_k}{T_i} - R_i \ln \frac{p_{pi}}{p_i} \right) \quad (8.68)$$

Vagy

$$\Delta S_k = \sum_{i=1}^n m_i \left( c_{vi} \ln \frac{p_{pi}}{p_i} + c_{pi} \ln \frac{V_k}{V_i} \right). \quad (8.69)$$

**Példa:**

Adiabatikusan összekeverünk 3 kg oxigént ( $p=3$  bar,  $t = 45$  °C) és 2 kg levegőt ( $p = 5$  bar,  $t = 250$  °C) úgy, hogy a térfogatok összegződnek. Határozza meg a keverék hőmérsékletét és nyomását, az alkotók térfogatarányait, parciális nyomásait, valamint a keveredés során bekövetkező entrópiaváltozást!  $R_M = 8314$  J/(kmol K),  $M_{O_2} = 32$ ,  $M_{lev}=29$

**Megoldás:**

Az alkotók gázállandói és fajhői:

$$R_{O_2} = \frac{R_M}{M_{O_2}} = \frac{8314}{32} = 259,81 \text{ J/(kgK)},$$

$$R_{lev} = \frac{R_M}{M_{lev}} = \frac{8314}{29} = 286,68 \text{ J/(kgK)},$$

$$c_{vO_2} = \frac{f}{2} R_{O_2} = \frac{5}{2} 259,81 = 649,53 \text{ J/(kgK)},$$

$$c_{vlev} = \frac{f}{2} R_{lev} = \frac{5}{2} 286,68 = 716,7 \text{ J/(kgK)}.$$

A keverék hőmérséklete

$$T_{kev} = \frac{m_1 c_{v1} T_1 + m_2 c_{v2} T_2}{m_1 c_{v1} + m_2 c_{v2}} = \frac{3 \cdot 649,53 \cdot 318,15 + 2 \cdot 716,7 \cdot 523,15}{3 \cdot 649,53 + 2 \cdot 716,75} = 405,04 \text{ K}$$

Az oxigén kezdeti térfogata

$$V_{O_2} = \frac{m_{O_2} R_{O_2} T_{O_2}}{p_{O_2}} = \frac{3 \cdot 259,81 \cdot 318,5}{3 \cdot 10^5} = 0,8266 \text{ m}^3.$$

Az levegő kezdeti térfogata

$$V_{lev} = \frac{m_{lev} R_{lev} T_{lev}}{p_{lev}} = \frac{2 \cdot 286,68 \cdot 523,15}{5 \cdot 10^5} = 0,6 \text{ m}^3.$$

A keverék térfogata

$$V_{kev} = V_{O_2} + V_{lev} = 0,8266 + 0,6 = 1,4266 \text{ m}^3$$

A keverék tömege

$$m_{kev} = m_{O_2} + m_{lev} = 3 + 2 = 5 \text{ kg}.$$

Tömegarányok a keverékben

$$g_{O_2} = g_1 = \frac{m_{O_2}}{m_{kev}} = \frac{3}{5} = 0,6; \quad g_{lev} = g_2 = \frac{m_{lev}}{m_{kev}} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

A keverék gázállandója

$$R_{kev} = g_{O_2} R_{O_2} + g_{lev} R_{lev} = 0,6 \cdot 259,81 + 0,4 \cdot 285,68 = 270,56 \text{ J/(kgK)}.$$

A keverék nyomása

$$p_{kev} = \frac{m_{kev} \cdot R_{kev} \cdot T_{kev}}{V_{kev}} = \frac{5 \cdot 270,56 \cdot 405,04}{1,4266} = 3,341 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 3,341 \text{ bar}.$$

Mivel levegő keveredik oxigénnel, a keverékben csak oxigén és nitrogén lesz. A levegőben az alkotók (oxigén, nitrogén) térfogatarányai:

$$r_{O_2(lev)} = 0,21; \quad r_{N_2(lev)} = 0,79.$$

$$R_{N_2} = \frac{R_M}{M_{N_2}} = \frac{8314}{28} = 296,92 \text{ J/(kgK)}.$$

A levegőben levő nitrogén és oxigén tömegének meghatározásához számítsuk át a fenti térfogatarányokat tömegarányokra:

$$g_{N_2(lev)} = r_{N_2(lev)} \frac{R_{lev}}{R_{N_2}} = 0,79 \frac{286,68}{296,92} = 0,7627;$$

$$g_{O_2(lev)} = r_{O_2(lev)} \frac{R_{lev}}{R_{O_2}} = 0,21 \frac{286,68}{259,81} = 0,2373.$$

A levegőben levő  $N_2$  és  $O_2$  tömege

$$m_{N_2(lev)} = m_{lev} g_{N_2(lev)} = 2 \cdot 0,7627 = 1,5254 \text{ kg},$$

$$m_{O_2(lev)} = m_{lev} g_{O_2(lev)} = 3 \cdot 0,2373 = 1,4746 \text{ kg}.$$

A keverékben a nitrogén és az oxigén tömege

$$m_{N_2(kev)} = m_{N_2(lev)} = 1,5254 \text{ kg},$$

$$m_{O_2(kev)} = m_{O_2} + m_{O_2(lev)} = 3 + 1,4746 = 4,4746 \text{ kg}.$$

Az alkotók tömegarányai a keverékben:

$$g_{N_2(kev)} = \frac{m_{N_2(kev)}}{m_{kev}} = \frac{1,5254}{5} = 0,3151,$$

$$g_{O_2(kev)} = \frac{m_{O_2(kev)}}{m_{kev}} = \frac{4,4746}{5} = 0,6949.$$

Az alkotók térfogatarányai a tömegarányokból

$$r_{N_2(kev)} = g_{N_2(kev)} \frac{R_{N_2}}{R_{kev}} = 0,3151 \frac{296,92}{271,56} = 0,3327;$$

$$r_{O_2(kev)} = g_{O_2(kev)} \frac{R_{O_2}}{R_{kev}} = 0,6949 \frac{259,81}{271,56} = 0,6673.$$

Az alkotók parciális nyomásai

$$p_{p_{O_2}} = p_{kev} r_{O_2(kev)} = 3,341 \cdot 0,6673 = 2,2294 \text{ bar},$$

$$p_{p_{N_2}} = p_{kev} r_{N_2(kev)} = 3,341 \cdot 0,3327 = 1,1116 \text{ bar}.$$

A keveredés során bekövetkező entrópiaváltozás

$$\begin{aligned} \Delta S_k &= m_1 \left( c_{v1} \ln \frac{T_k}{T_1} + R_1 \ln \frac{V_k}{V_1} \right) + m_2 \left( c_{v2} \ln \frac{T_k}{T_2} + R_2 \ln \frac{V_k}{V_2} \right) = \\ &= 3 \left( 649,53 \ln \frac{405,04}{318,15} + 259,81 \ln \frac{1,4266}{0,8266} \right) + \\ &+ 2 \left( 716,7 \ln \frac{405,04}{523,15} + 296,92 \ln \frac{1,4266}{0,6} \right) = 1043,424 \text{ J / K}. \end{aligned}$$

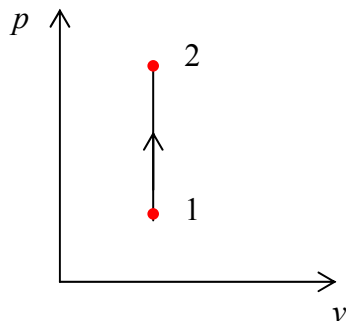
## 9. Nevezetes ideális gázfolyamatok

A következőkben áttekintjük az eddigi tanulmányainkból már részben megismert nevezetes ideális folyamatokat, melyek munkaközege ideális gáz.

A folyamatok tárgyalásának menete az állapotjelzők közötti kapcsolat fel-tárásából, a folyamatok  $p - v$  és  $T - s$  diagramban történő ábrázolásából és a termodinamika első főtételenek adott folyamatra való alkalmazásából – a hőmennyiségek, munkák meghatározásából – áll.

### 9.1. Izochor ( $v = \text{állandó}$ ) folyamat

Írjuk fel az állapotegyenletet a kezdeti (1) és végállapotra (2):



$$p_1 v_1 = RT_1, \quad (9.1)$$

$$p_2 v_2 = RT_2. \quad (9.2)$$

Figyelembe véve, hogy  $v_1 = v_2$  osszuk el a második egyenletet az elsővel megkapjuk az izochor állapotváltozás során az állapotjelzők közötti kapcsolatot

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{vagy} \quad \frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2} = \frac{T}{p} = \text{const.},$$

9.1. ábra - Izochor folyamat

mely a Gay-Lussac II. törvénye nevet vi-

seli.

Alkalmazzuk a vizsgált folyamatra a termodinamika I. főtétele.

$$u_2 - u_1 = q_{1,2} + w_{1,2}. \quad (9.4)$$

A folyamattal kapcsolatos hőmennyiség

$$q_{1,2} = c_v (T_2 - T_1). \quad (9.5)$$

A folyamat során a zárt rendszer munkája a (7.2) kifejezés alkalmazásával

$$w_{1,2} = - \int_1^2 p dv = 0. \quad (9.6)$$

A (9.4) egyenletből

$$u_2 - u_1 = q_{1,2}. \quad (9.7)$$



A nyitott rendszer munkájának kifejezését a termodinamika I. főtételek (7.30) egyenletéből, illetve a technikai munka (7.26) összefüggésének izochor folyamatra történő alkalmazásával nyerhetjük

$$w_{t1,2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \int_1^2 v dp = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + v \int_1^2 dp = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + v(p_2 - p_1), \quad (9.8)$$

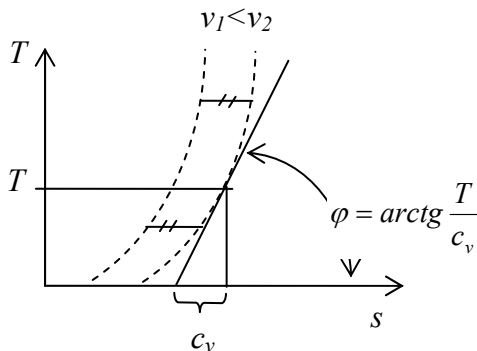
$$w_{t1,2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + R(T_2 - T_1). \quad (9.9)$$

Az összenyomhatatlan vagy annak tekinthető közeget szállító gép (pl. ventilátor, szivattyú) teljesítményigénye meghatározható az izochor folyamat technikai munkájának (9.8) egyenlete segítségével

$$P = \dot{m} w_{t1,2} = \dot{m} \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \dot{m} v(p_2 - p_1) = \dot{m} \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \dot{V}(p_2 - p_1), \quad (9.10)$$

ahol  $\dot{V}$  - a térfogatáram.

### Az izochor folyamat ( $v$ =állandó) görbájének egyenlete T - s diagramban



9.2. ábra -  $v$  = állandó görbék

Alkalmazzuk az entrópia

$$ds = \frac{\delta q}{T}$$

kifejezését a  $v$  = állandó folyamatra.

Mivel  $\delta q = c_v dT$ , helyettesítéssel megkapjuk a  $v$  = állandó vonalak differenciálegyenletét

$$ds = c_v \frac{dT}{T}, \quad (9.11)$$

melyből integrálással kapjuk

$$s - s_0 = c_v \ln \frac{T}{T_0}. \quad (9.12)$$

A hőmérsékletet kifejezve a görbe egyenlete

$$T = T_0 e^{\frac{s-s_0}{c_v}}, \quad (9.13)$$

vagyis a  $v = \text{állandó}$  folyamatokat exponenciális görbékkel írjuk le. A görbék érintőjének iránytangense

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_v = \frac{T}{c_v}. \quad (9.14)$$

Tehát a  $v = \text{állandó}$  görbék azonos hőmérsékleten azonos iránytangenssel rendelkeznek, amely azt jelenti, hogy a különböző térfogatokhoz tartozó görbék vízszintes eltolással származtathatók egymásból, illetve egymással fedésbe hozhatók. (A két egymás melletti görbe közötti vízszintes távolság – entrópiaváltozás – mindenütt azonos). A két görbe közötti izotermán bekövetkező entrópiaváltozás alapján meghatározható a térfogat növekedési iránya

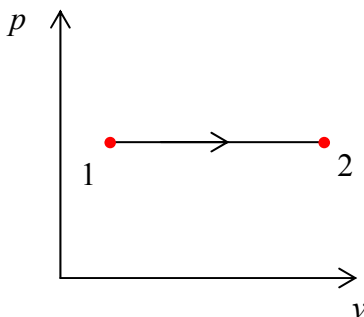
$$s_2 - s_1 = R \ln \frac{v_2}{v_1}. \quad (9.15)$$

Tehát az egyes görbékhez tartozó fajtérfogat értékek az entrópia növekedés irányába nőnek.

Ez a képlet is mutatja, hogy két  $v = \text{állandó}$  görbe között az izotermikus metszések azonosak.

## 9.2. Izobár ( $p = \text{állandó}$ ) folyamat.

Az izochor folyamathoz hasonlóan írhatjuk



$$p_1 v_1 = RT_1,$$

$$p_2 v_2 = RT_2,$$

ahol  $p_1 = p_2 = p$ , a két állapotegyenletből kapjuk

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ vagy } \frac{T_1}{v_1} = \frac{T_2}{v_2} = \frac{T}{v} = \text{const.} \quad (9.16)$$

## 9.3. ábra - Izobár folyamat

Ez Gay-Lussac I. törvénye.

A folyamattal kapcsolatos hőmennyiség

$$q_{1,2} = c_p (T_2 - T_1). \quad (9.17)$$

Az első főtételből következőleg

$$q_{1,2} = i_2 - i_1 - \int_1^2 v dp = i_2 - i_1. \quad (9.18)$$

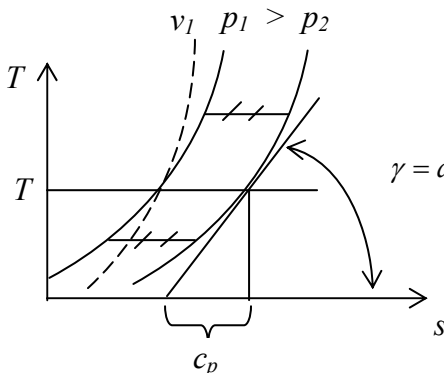
A zárt rendszer munkája (térfogatváltozási munka) a (7.2) egyenlet alapján

$$w_{1,2} = - \int_1^2 p dv = -p(v_2 - v_1) = R(T_1 - T_2). \quad (9.19)$$

A nyitott rendszer munkája (technikai munka) a (7.26) egyenlet alkalmazásával

$$w_{t1,2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \int_1^2 v dp = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}. \quad (9.20)$$

#### A folyamat görbájének egyenlete T - s diagramban



9.4. ábra – p = állandó görbék

melyből integrálással kapjuk

$$s - s_0 = c_p \ln \frac{T}{T_0}. \quad (9.22)$$

A hőmérsékletet kifejezve a kapjuk a p = állandó görbék egyenletét:

$$T = T_0 e^{\frac{s-s_0}{c_p}}. \quad (9.23)$$

Hasonlóan járunk el, mint az izochor folyamatnál tettük, vagyis alkalmazzuk az entropia  $ds = \frac{\delta q}{T}$  kifejezését most a p = állandó folyamatra, ahol  $\delta q = c_p dT$  ezzel

$$ds = c_p \frac{dT}{T}, \quad (9.21)$$

vagyis a  $p = \text{állandó}$  folyamatokat is exponenciális görbékkel írjuk le. A görbék érintőjének iránytangense

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_p = \frac{T}{c_p}. \quad (9.24)$$

Mivel  $c_p > c_v$ ,

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_p < \left(\frac{dT}{ds}\right)_v. \quad (9.25)$$

Tehát a  $v = \text{állandó}$  görbék meredekebben haladnak, mint az izobárok.

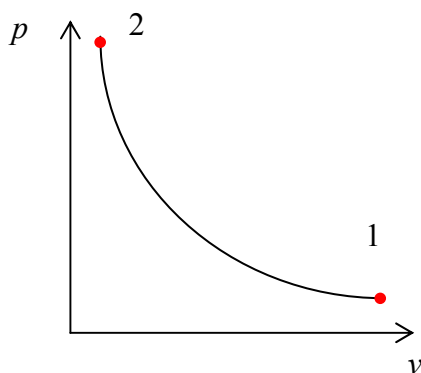
Az izobár folyamat görbéire ugyanazon megállapítások érvényesek, mint amelyeket az izochorokra tettünk. Itt az érintő szubtangense az állandó nyomásra vonatkozó fajhő.

A két izobár közé rajzolt izoterma mentén bekövetkező entrópia-változásból meghatározhatjuk a két nyomás egymáshoz képesti viszonyát, illetve a nyomásnövekedés irányát.

$$s_2 - s_1 = R \ln \frac{p_1}{p_2} > 0, \quad \text{azaz } p_1 > p_2.$$

Tehát az egyes görbékhez tartozó nyomásértékek az entrópiacsökkenés irányába nőnek.

### 9.3. Izotermikus ( $T = \text{állandó}$ ) folyamat



Az állapotegyenlet az 1 és 2 állapotban

$$p_1 v_1 = RT_1, \quad p_2 v_2 = RT_2,$$

mivel

$$T_1 = T_2 = T = \text{állandó},$$

az állapotegyenletekből következik

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = pv = \text{állandó}.$$

(9.26)

### 9.5. ábra - Izotermikus folyamat

Ez a Boyle–Mariotte-törvény.

A görbe egyenlete

$$p = \frac{\text{állandó}}{v} = \frac{RT}{v}, \quad (9.27)$$

mely egy egyenlőszárú hiperbolát ír le. A különböző hőmérsékletekhez tartozó hiperbolák menetét az  $RT$  állandó értéke határozza meg. Mint az egyenletből kitűnik, a nagyobb hőmérsékletnek megfelelő hiperbola a negyvenöt fokal szögfelező mentén feljebb helyezkedik el.

A folyamattal kapcsolatos térfogatváltozási munka

$$w_{1,2} = -\int_1^2 p dv = -RT \ln \frac{v_2}{v_1}. \quad (9.28)$$

A technikai munka

$$w_{t1,2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \int_1^2 v dp = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + RT \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (9.29)$$

Belsőenergia- és entalpiaváltozás (csak ideális gázok esetén)

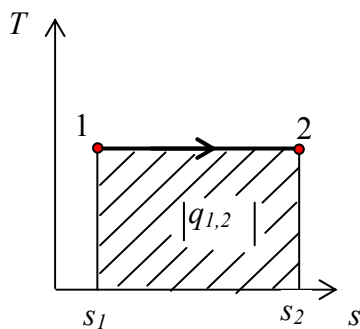
$$u_2 - u_1 = 0, \quad i_2 - i_1 = 0.$$

A folyamattal kapcsolatos hőmennyiség

$$q_{1,2} = c_{T=\text{const}} (T_2 - T_1) = c_{T=\text{const}} \cdot 0 \neq 0.$$

Ebből az egyenletből következik, hogy az izotermikus folyamat fajhője

$$c_{T=\text{const}} = \pm\infty.$$



**9.6. ábra** Izotermikus folyamat hőmennyisége

A hőmennyiséget az első főtétel (7.6) összefüggéséből kapjuk meg

$$q_{1,2} = -w_{1,2} = \int_1^2 p dv = RT \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (9.31)$$

vagy a  $T - s$  diagram alapján az entrópiaváltozásból (9.6. ábra)

$$q_{1,2} = T(s_2 - s_1) \quad (9.32)$$

határozzuk meg.

#### 9.4. Ideális adiabatikus folyamat ( $q_{1,2}, \delta q = 0$ )

Alkalmazzuk az I. főtétel differenciális alakjait az adiabatikus folyamatra

$$du = \delta q - p dv, \quad du = c_v dT, \quad (9.33)$$

$$di = \delta q + v dp, \quad di = c_p dT, \quad (9.34)$$

melyekből

$$c_v dT = -p dv, \quad (9.35)$$

$$c_p dT = v dp. \quad (9.36)$$

A (9.36) egyenlet (9.35)-el történő osztásával

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa = -\frac{v dp}{p dv},$$

a változók szétválasztása után kapjuk

$$\kappa \frac{dv}{v} = -\frac{dp}{p}. \quad (9.37)$$

A (9.37) differenciálegyenlet integrálása

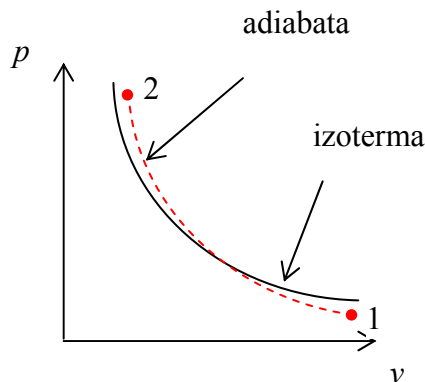
$$\kappa \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dp}{p} + C, \quad (9.38)$$

$$\kappa \ln v = -\ln p + \ln C, \quad (9.39)$$

melyből

$$pv^\kappa = C = \text{állandó}. \quad (9.40)$$

Az adiabatikus folyamat tehát a  $p$ - $v$  diagramban nem egyenlőszárú hiperbola. Az izotermához képesti helyzete a 9.7. ábrán látható.



9.7. ábra - Adiabatikus folyamat

Az állapotjelzők közötti kapcsolatok (Poisson-egyenletek)

$$p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa, \quad \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa, \quad (9.41)$$

$$p_1 v_1 v_1^{\kappa-1} = p_2 v_2 v_2^{\kappa-1}, \quad RT_1 v_1^{\kappa-1} = RT_2 v_2^{\kappa-1}, \quad \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{\kappa-1}, \quad (9.42)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \quad (9.43)$$

Az adiabatikus folyamat térfogatváltozási munkáját az első főtétel

$$u_2 - u_1 = q_{1,2} + w_{1,2}, \quad (9.44)$$

egyenletéből határozzuk meg  $q_{1,2} = 0$  helyettesítéssel

$$w_{1,2} = u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1). \quad (9.45)$$

Ez a kifejezés további alakokra hozható

$$w_{1,2} = c_v (T_2 - T_1) = \frac{R}{\kappa - 1} (T_2 - T_1) = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{\kappa - 1} \quad (9.46)$$

vagy

$$w_{1,2} = \frac{R}{\kappa - 1} (T_2 - T_1) = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \quad (9.47)$$

vagy

$$w_{1,2} = \frac{R}{\kappa - 1} (T_2 - T_1) = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] \quad \text{stb.} \quad (9.48)$$

A folyamat technikai munkája legegyszerűbben szintén a termodinamika I főtételének megfelelő alakjából határozható meg:

$$i_2^* - i_1^* = q_{1,2} + w_{1,2}, \quad (9.49)$$

$$w_{11,2} = i_2^* - i_1^* = c_p(T_2 - T_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}, \quad (9.50)$$

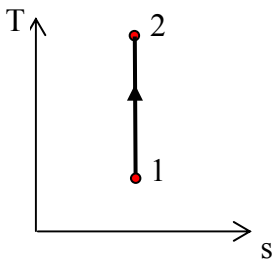
$$w_{11,2} = c_p(T_2 - T_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}, \quad (9.51)$$

$$w_{11,2} = c_p(T_2 - T_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}, \quad (9.52)$$

stb.

A folyamattal kapcsolatos hőmennyiség  $q_{1,2} = c_{ad}(T_2 - T_1) = 0$ .

Mivel  $(T_2 - T_1) \neq 0$ , a hőmennyiség azért lesz zérus, mert a folyamat fajhője  $c_{ad} = 0$ .



**9.8. ábra - Izentrópikus kompresszió**

Az entrópiaváltozás  $ds = \frac{\delta q}{T}$  definiáló képlet

lete szerint az ideális adiabatikus állapotváltozás során  $ds=0$ , melyből következik  $s_2 = s_1$ .

Ezt az állapotváltozást ezért *izentrópikus* állapotváltozásnak is nevezzük.

Az ideális adiabatikus állapotváltozás  $T - s$  diagramban  $s = \text{állandó}$  vonallal ábrázolható (9.8. ábra).

Az eddig vizsgált ideális folyamatokban közös volt, hogy a folyamat során valamilyen állapotjelző vagy folyamatjellemző ( $q_{1,2}$ ) állandó volt.

Foglaljuk össze a következő táblázatban a folyamatok egyenleteit, hőmennyiségeit és fajhőit. Amennyiben a kapott eredményeket elemezzük, azt látjuk, hogy a négy folyamat mindegyikének saját állandó fajhője van. Tehát a vizsgált folyamatokat jellemezi a folyamat során érvényes fajhő értéke  $(c_v, c_p, \pm \infty, 0)$ .



Folyamatok	Egyenlet	Hőmennyiség	Fajhő
Izochor	$v = \text{állandó}$	$c_v(T_2 - T_1)$	$c_v$
Izobár	$p = \text{állandó}$	$c_p(T_2 - T_1)$	$c_p$
Izotermikus	$T = \text{állandó}$ $pv = \text{állandó}$	$RT \ln \frac{v_2}{v_1}$	$\pm \infty$
Adiabatikus	$q_{1,2}, \delta q = 0$	0	0

### 9.5. Politrópikus folyamat ( $c_n = \text{állandó}$ )

Definiáljunk egy olyan folyamatot, illetve folyamatcsoportot melynek az a jellemzője, hogy a fajhője bármilyen értékű lehet, de a folyamat során állandó. Ez a folyamat a politrópikus folyamat, melynek alapvető jellemzője, hogy fajhője

$$c_n = \text{állandó.} \quad (9.53)$$

Ezzel a folyamattal kapcsolatos hőmennyiség

$$q_{1,2} = c_n(T_2 - T_1). \quad (9.54)$$

Az elemi hőmennyiség

$$\delta q = c_n dT .$$

Az állapotjelzők közötti kapcsolat feltárására alkalmazzuk az adott folyamatra – az adiabatikus folyamathoz hasonlóan – az első főtétel differenciális alakjait.

$$du = \delta q - pdv, \quad du = c_v dT, \quad (9.55)$$

$$di = \delta q + vdp, \quad di = c_p dT, \quad (9.56)$$

$$c_v dT = c_n dT - pdv, \quad (9.57)$$

$$c_p dT = c_n dT + vdp, \quad (9.58)$$

$$\frac{c_p - c_n}{c_v - c_n} = -\frac{vdp}{pdv}, \quad (9.59)$$

Vezessünk be az egyenlet bal oldalán új változót ( $n$ ), melyet politrópikus kitevőnek nevezünk:

$$n = \frac{c_p - c_n}{c_v - c_n}, \quad (9.60)$$

$$n \frac{dv}{v} = - \frac{dp}{p}, \quad (9.61)$$

$$n \int \frac{dv}{v} = - \int \frac{dp}{p} + C, \quad (9.62)$$

$$n \ln v = - \ln p + \ln C, \quad (9.63)$$

melyből a politrópikus állapotváltozás egyenlete

$$pv^n = C = \text{állandó}. \quad (9.64)$$

Az állapotjelzők közötti kapcsolatok (Poisson-egyenletek):

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n, \quad \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^n, \quad (9.65)$$

$$p_1 v_1 v_1^{n-1} = p_2 v_2 v_2^{n-1}, \quad RT_1 v_1^{n-1} = RT_2 v_2^{n-1}, \quad (9.66)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{n-1}, \quad \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (9.67)$$

A politrópikus fajhő kifejezése, mint az  $n$  függvénye a (9.60) egyenletből kifejezve:

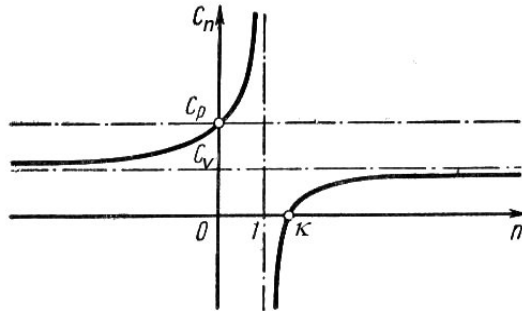
$$c_n = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1}. \quad (9.69)$$

A fajhő változását a politrópikus kitevő függvényében a 9.9. ábra szemlélteti.

A politrópikus folyamat munkáinak kifejezéseit legegyszerűbben a termodinamika első főtételének matematikai egyenleteiből nyerhetjük.

$$u_2 - u_1 = q_{1,2} + w_{1,2}, \quad (9.70)$$

$$i_2^* - i_1^* = q_{1,2} + w_{1,2}, \quad (9.71)$$



9.9. ábra - A politrópikus fajhő változása

A térfogatváltozási munka

$$w_{1,2} = (c_v - c_n)(T_2 - T_1). \quad (9.72)$$

A technikai munka

$$w_{1,2} = (c_p - c_n)(T_2 - T_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}. \quad (9.73)$$

Az izochor, izobár, izotermikus és adiabatikus folyamatok a politrópikus folyamatok egy-egy tipikus fajtái, melyek a következő politrópikus kitevővel rendelkeznek

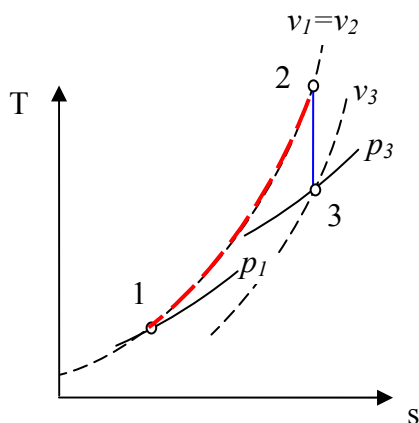
A folyamat neve	Egyenlete	Politrópus kitevő (n) értéke
Izochor	$v = \text{állandó}$	$\pm \infty$
Izobár	$p = \text{állandó}$	0
Izotermikus	$p v = \text{állandó}$	1
Adiabatikus	$p v^\kappa = \text{állandó}$	$\kappa$

A politrópikus folyamat tehát általában egy folyamatsorozat, mely végtelesen sok olyan folyamatot foglal magába, amelyik állandó fajhővel rendelkezik. A fajhő értéke  $-\infty < c_n \leq +\infty$  lehet. A politrópikus folyamat során a politrópikus kitevő értéke állandó, és  $-\infty < n \leq +\infty$  értéket vehet fel.

## Példa: (1)

Mennyi hőt kell 3 kg  $p_1=1$  bar nyomású,  $v_1 = 0,2$  m<sup>3</sup>/kg fajtérfogatú CO-val állandó térfogaton közölni, hogy az azt követő adiabatikus expanzió végén a  $p_3 = 2$  bar és  $v_3 = 1,5$  m<sup>3</sup>/kg paraméterekkel jellemzett állapotba jusson.  $R_M=8314$  J/(kmol K),  $M_{CO}=28$ .

## Megoldás:



Az állandó térfogaton közölt hő

$$Q_{1,2} = mc_v(T_2 - T_1).$$

A CO gázállandója

$$R = \frac{R_M}{M_{CO}} = \frac{8314}{28} = 296,9 \text{ J/(kgK)}.$$

A  $c_v$  fajhő

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} = \frac{296,9}{1,4 - 1} = 742,25 \text{ J/(kgK)}.$$

A  $T_1$  hőmérséklet az állapotegyenletből

$$T_1 = \frac{p_1 v_1}{R} = \frac{10^5 \cdot 0,2}{296,9} = 67,36 \text{ K}.$$

Gay-Lussac törvényéből következik:

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1}.$$

A 2. állapot nyomását az adiabatikus állapotváltozás összefüggését felhasználva határozhatjuk meg:

$$p_2 = p_3 \left( \frac{v_3}{v_2} \right)^\kappa = 2 \left( \frac{1,5}{0,2} \right)^{1,4} = 33,58 \text{ bar}.$$

A  $T_2$  hőmérséklet

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 67,36 \frac{33,58}{1} = 2262 \text{ K}.$$

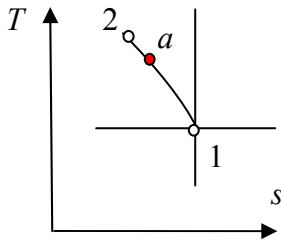
A hőmennyiség

$$Q_{1,2} = mc_v(T_2 - T_1) = 3 \cdot 742,25(2262 - 67,36) = 4,8869 \cdot 10^6 \text{ J} = 4,8869 \text{ MJ}$$

**Példa (2):**

$m = 2 \text{ kg/s}$  levegő ideális politrópikus folyamata a  $p_1 = 4 \text{ bar}$ ,  $t_1 = 127 \text{ }^\circ\text{C}$  állapotú pontban kezdődik és áthalad a  $p_a = 8 \text{ bar}$   $t_a = 187 \text{ }^\circ\text{C}$  állapoton. A folyamat teljesítményigénye  $1100 \text{ kW}$ . Meghatározandó: a) a végállapot paraméterei ( $p_2$ ,  $v_2$ ,  $t_2$ ); b) a folyamattal kapcsolatos hőmennyiség; c) a szükséges hűtővíz mennyiség, ha felmelegedése  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  lehet.  $R_{\text{lev}} = 287 \text{ J/(kg K)}$ ,  $\kappa = 1.4$ ,  $c_{\text{vöz}} = 4189 \text{ J/(kgK)}$ , ( $c_2 \approx c_1$ ).

**Megoldás:**



A végállapot jellemzőit a teljesítményigényből határozhatjuk meg:

$$P = \dot{m} w_{t1,2} = \dot{m} (c_p - c_n) (T_2 - T_1).$$

A politrópikus fajhőt az 1 és a állapotok között felírt Poisson-egyenletből számítjuk:

$$\frac{T_1}{T_a} = \left( \frac{p_1}{p_a} \right)^{\frac{n-1}{n}} \rightarrow \frac{n-1}{n} = \frac{\ln\left(\frac{T_1}{T_a}\right)}{\ln\left(\frac{p_1}{p_a}\right)},$$

$$n = \frac{1}{1 - \frac{\ln\left(\frac{T_1}{T_a}\right)}{\ln\left(\frac{p_1}{p_a}\right)}} = \frac{1}{1 - \frac{\ln\left(\frac{400}{460}\right)}{\ln\left(\frac{4}{8}\right)}} = 1,2526.$$

A politrópikus fajhő

$$c_n = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} = 717,5 \frac{1,2526 - 1,4}{1,2526 - 1} = -418,68 \text{ J/(kgK)}.$$

A teljesítmény képletéből a kilépő hőmérséklet

$$T_2 = T_1 + \frac{P}{\dot{m}(c_p - c_n)} = 400 + \frac{1,1 \cdot 10^6}{2(1005 + 418,68)} = 768,32 \text{ K}.$$

A folyamat végnyomása Poisson-egyenletből

$$p_2 = p_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} = 4 \left( \frac{786,32}{400} \right)^{\frac{1,2526}{1,2526-1}} = 114,31 \text{ bar}.$$

A fajtérfogat az állapotegyenletből

$$v_2 = \frac{RT}{p_2} = \frac{287 \cdot 786,32}{114,31 \cdot 10^5} = 0,0197 \text{ m}^3 / \text{kg}.$$

A folyamattal kapcsolatos hőmennyiség:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1,2} &= \dot{m} c_n (T_2 - T_1) = 2 \cdot (-418,68)(786,32 - 400) = \\ &= -323,489 \cdot 10^3 \text{ J/s}. \end{aligned}$$

Ezt a hőmennyiséget a hűtővíz viszi el (abba bevezetésre kerül).

$$-\dot{Q}_{1,2} = \dot{m}_{\text{víz}} c_{\text{víz}} \Delta t_{\text{víz}}.$$

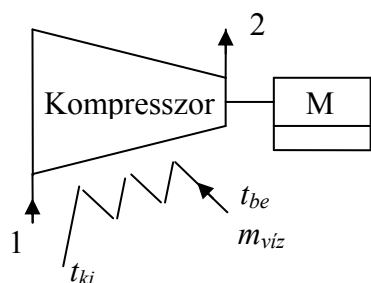
Ebből a szükséges hűtővíz tömegáram

$$\dot{m}_{\text{víz}} = \frac{-\dot{Q}_{1,2}}{c_{\text{víz}} \Delta t_{\text{víz}}} = \frac{323489}{4189 \cdot 15} = 5,148 \text{ kg/s}.$$

### Példa (3)

Egy levegőkompresszor politrópikusan levegőt sűrít. A kompresszió során a levegő entalpiája  $1,9 \cdot 10^5$  kJ/h értékkel nő. A sűrítésre fordított teljesítmény 60 kW. Határozza meg a folyamat politrópikus kitevőjét, valamint a szükséges hűtővíz mennyiségét, ha felmelegedése  $10^\circ\text{C}$  lehet.  $c_{\text{víz}}=4189 \text{ J}/(\text{kg K})$ ,  $R = 287 \text{ J}/(\text{kg K})$ ,  $\kappa= 1,4$ .

### Megoldás:



Az első főtétel

$$\dot{m}(i_2 - i_1) = \dot{Q}_{1,2} + \dot{m}w_{t1,2}.$$

A hőmennyiség

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1,2} &= \dot{m}(i_2 - i_1) - \dot{m}w_{t1,2} = \\ &= \frac{1,9 \cdot 10^5}{3600} - 60 = -7,2 \text{ kW}. \end{aligned}$$

másrészt mint a politrópikus folyamat hőmennyisége

$$\dot{Q}_{1,2} = \dot{m} c_n (T_2 - T_1).$$

Az entalpiaváltozás

$$\dot{m}(i_2 - i_1) = \dot{m} c_p (T_2 - T_1).$$

A két egyenletet egymással elosztva, kapjuk

$$\frac{c_n}{c_p} = \frac{\dot{Q}_{1,2}}{\dot{m}(i_2 - i_1)} = -\frac{7,22}{52,777} = -0,1368.$$

A politrópikus fajhő

$$c_n = -0,1368c_p = -0,1368 \cdot 1005 = -137,52 \text{ J}/(\text{kgK}).$$

A politrópikus kitevő

$$n = \frac{c_p - c_n}{c_v - c_n} = \frac{1005 + 137,52}{717,85 + 137,52} = \frac{1142,52}{855,377} = 1,3357.$$

A hűtővíz hőmérege (a gázból távozó hő a hűtővizet melegíti ezért pozitív lesz)

$$\dot{m}_{\text{víz}} c_{\text{víz}} \Delta t_{\text{víz}} = -\dot{Q}_{1,2},$$

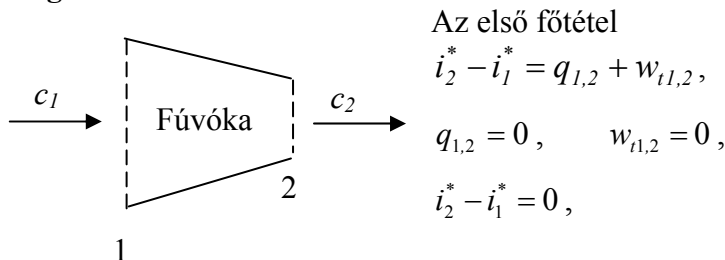
ebből a hűtővíz tömegárama

$$\dot{m}_{\text{víz}} = \frac{-\dot{Q}_{1,2}}{c_{\text{víz}} \Delta t_{\text{víz}}} = \frac{7220}{4189 \cdot 10} = 0,172 \text{ kg}/s.$$

#### Példa (4):

Nitrogén  $\dot{m} = 0,12 \text{ kg}/s$  mennyiségben állandósultan, súrlódásmentesen áramlik egy fúvókában. A gáz a fúvókához 2,8 bar nyomással és  $100^\circ\text{C}$  hőmérsékleten  $15 \text{ m}/s$  sebességgel érkezik, s a fúvókában izentrópicusan expandál 1,6 bar nyomásig. Határozza meg a fúvóka kilépési keresztmetszetét!  $M_{N_2} = 28$ ,  $R_M = 8314 \text{ J}/(\text{kmol K})$ .

#### Megoldás:



Az első főtétel

$$\begin{aligned} i_2^* - i_1^* &= q_{1,2} + w_{t1,2}, \\ q_{1,2} &= 0, \quad w_{t1,2} = 0, \\ i_2^* - i_1^* &= 0, \end{aligned}$$

$$i_2^* - i_1^* = i_2 - i_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}.$$

Melyből a sebesség

$$c_2 = \sqrt{2(i_1 - i_2) + c_1^2} = \sqrt{2c_p(T_1 - T_2) + c_1^2}.$$

A keresztmetszetet a kontinuitás egyenletéből határozzuk meg:

$$\dot{m} = \rho_2 c_2 A_2 \rightarrow A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 c_2}.$$

Mivel az expanzió folyamat izentropikus (ideális adiabatikus), ezért

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 373 \left( \frac{1,6}{2,8} \right)^{1,4-1} = 317,83 \text{ K},$$

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1} R_{N_2} = 3,5 \cdot 296,93 = 1039,25 \text{ J / (kgK)},$$

$$\text{ahol } R = \frac{R_M}{M_{N_2}} = \frac{8314}{28} = 296,93 \text{ J / (kgK)}.$$

A kilépő sebesség

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot 1039,25(373 - 317,83) + 15^2} = 338,96 \text{ m / s}.$$

A kilépő sűrűség

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R_{N_2} T_2} = \frac{1,6 \cdot 10^5}{296,93 \cdot 317,83} = 1,695 \text{ kg / m}^3.$$

A kilépő keresztmetszet

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 c_2} = \frac{0,12}{1,561 \cdot 338,96} = 2,088 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

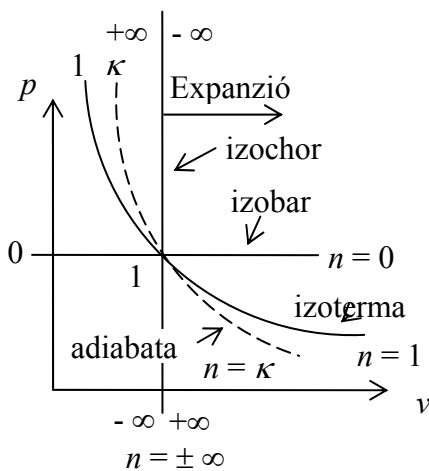


## 9.6. Politrópus folyamatok és munkáik ábrázolása

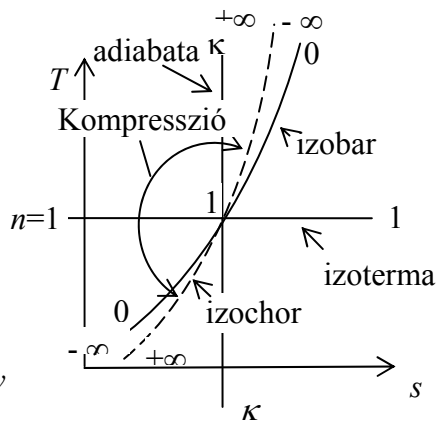
### 9.6.1. Politrópus folyamatok ábrázolása $p - v$ és $T - s$ diagramban

A politrópus folyamatok  $p - v$  és  $T - s$  diagramokban történő ábrázolásához először viszonyító görbeként a már megismert ideális folyamatokat célszerű a diagramokban a 9.10. és 9.11. ábrákon látható módon feltüntetni.

Amennyiben görbék metszéspontját választjuk az ábrázolandó folyamat kezdőpontjának, a folyamat ábrázolása egyértelmű lesz és a folyamat sajátosságait illetően további általánosítható megállapítást tehetünk. A diagramokon az 1 ponton átmenő  $v =$  állandó vonaltól jobbra haladó folyamatok expanziót, az ezzel ellentétes irányú folyamatok kompressziót jelölnek. Az alapgörbék mindkét végén feltüntettük a politrópus kitevők értékét is.



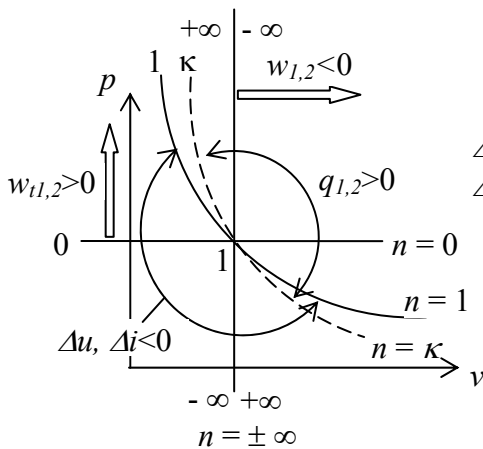
9.10. ábra Viszonyító görbék a  $p - v$  diagramban



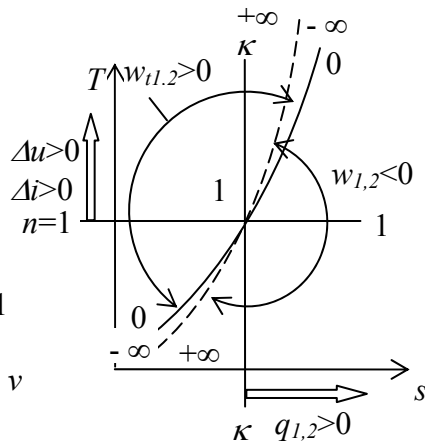
9.11. ábra Viszonyító görbék a  $T - s$  diagramban

A folyamat  $p - v$ , illetve  $T - s$  diagram-béli menete alapján eldönthető a folyamattal kapcsolatos hőmennyiség, munkák, entalpia- és belsőenergia-változás előjele (9.12, 9.13. ábrák).

A hőmennyiség akkor pozitív, ha a folyamat az 1 pontból kiindulva a  $p - v$  diagramban az adiabata fölött, illetve  $T - s$  diagramban az entrópia-



**9.12. ábra Előjelek p - v diagramban**



**9.13. ábra Előjelek T - s diagramban**

növekedés irányába halad (ez következik az entrópia definiáló egyenletéből).

Mivel ideális gázoknál a belső energia és az entalpia csak a hőmérséklet függvénye, a belsőenergia-változás és entalpiaváltozás előjeléről a folyamat izotermához képesti helyzete alapján dönthetünk. A  $T = \text{állandó}$  vonal fölött haladó folyamatok belsőenergia- és entalpiánövekedéssel járnak.

Az elemi fizikai (térfogatváltozási) munkát a  $\delta w = -pdv$  összefüggés adja meg, melyből látható, hogy a munka előjele a  $dv$  térfogatváltozás előjelétől függ. A térfogat növekedésekor (expanzió) a térfogatváltozási munka negatív, míg ellenkező esetben pozitív.

Az elemi technikai munka a sebességváltozás elhanyagolásával a  $\delta w_t = vdp$  egyenlettel számítható. Ebből következik, hogy a technikai munka előjele a nyomásváltozás előjelével egyező.

### 9.6.2. Belsőenergia- és entalpiaváltozás ábrázolása T - s diagramban

A belsőenergia-változás ideális gázoknál az

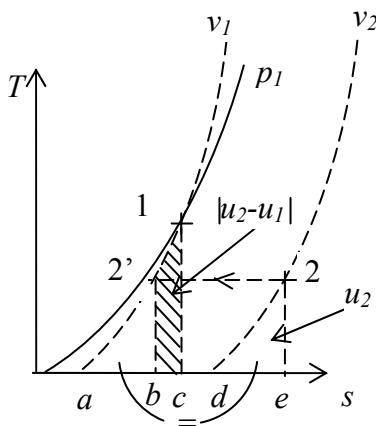
$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) \quad (9.74)$$

egyenlettel számítható, mely megegyezik a  $T_1 \div T_2$  hőmérsékletarárok között állandó térfogaton közölt hőmennyiséggel.

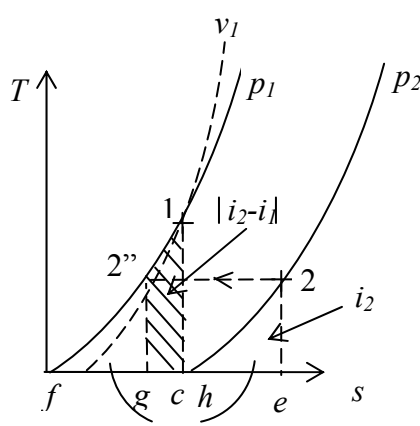
A (9.74) összefüggés

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - 0) - c_v(T_1 - 0) \quad (9.75)$$

alakban is írható, ahol az egyenlet jobb oldalának két tagja a 0 K -tól számított belsőenergiákat jelöli, melyek, mint állandó térfogaton közölt hőmennyiségek értelmezhetők.



**9.14. ábra -A belsőenergia-változás szerkesztése**



**9.15. ábra - Az entalpia-változás szerkesztése**

Ezek a hőmennyiségek (és ezzel a belső energiák)  $T - s$  diagramban  $v$ -állandó görbék alatti területek lesznek.

A 9.14. ábrán

$$u_1 \hat{=} \text{terület}(1 - a - c - 1), \quad u_2 \hat{=} \text{terület}(2 - d - e - 2).$$

A belsőenergia-változást a két terület különbségeként értelmezzük. Szerkesztése a kisebbik terület ( $u_2$ ) 9.14. ábra szerinti eltolásával történik. A belsőenergia-változás abszolút értékét a különbségeképpen létrejött 1-2'-b-c-1 vonalkázott terület jelöli.

Az entalpiaváltozás ábrázolása (9.15. ábra) esetében hasonlóképpen járunk el, csak mivel az entalpiaváltozás az

$$i_2 - i_1 = c_p(T_2 - T_1) \quad (9.76)$$

egyenlettel határozható meg, az entalpia területeket az *állandó nyomás-görbe* alatti területek

$$i_1 \hat{=} \text{terület}(1 - f - c - 1), \quad i_2 \hat{=} \text{terület}(2 - h - e - 2),$$

az entalpiaváltozás abszolút értékét pedig az 1-2''-g-c-1 terület szemlélteti.

### 9.6.3. Munkák ábrázolása T - s diagramban.

A termodinamika első főtétele alapján a fizikai, illetve a technikai munka ( $c_1 \approx c_2$  esetén) kifejezése

$$w_{1,2} = u_2 - u_1 - q_{1,2} \quad \text{és} \quad w_{t1,2} = i_2 - i_1 - q_{1,2}. \quad (9.77)$$

Tehát a munkák a hőmennyiség és belsőenergia-változás (vagy entalpia-változás) ismeretében határozhatók meg.

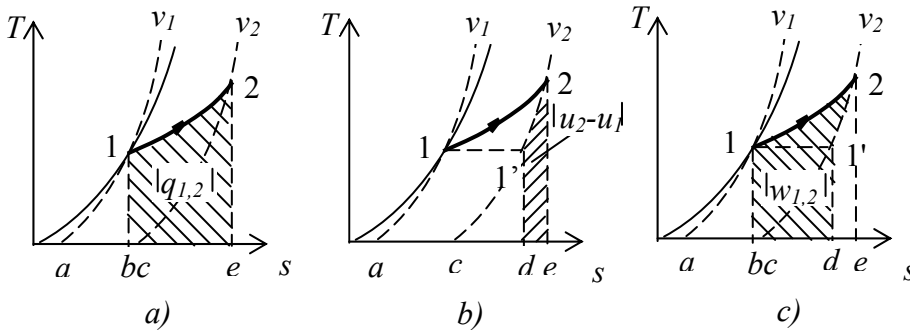
A területeket, mint az adott mennyiségek (entalpiaváltozás, belsőenergia változás, hőmennyiség) abszolút értékeit értelmezzük, vagyis

$$\text{amennyiben } u_2 - u_1 < 0 \Rightarrow u_2 - u_1 = -|u_2 - u_1|,$$

$$i_2 - i_1 < 0 \Rightarrow i_2 - i_1 = -|i_2 - i_1|,$$

$$q_{1,2} < 0 \Rightarrow q_{1,2} = -|q_{1,2}|.$$

A helyettesítéseket a (9.77) egyenletbe ennek megfelelően végrehajtva, az megmutatja milyen műveletet kell végezni a T - s diagramban ábrázolt hő-, belső energia, entalpia területekkel (abszolútértékes mennyiségek) a munkák meghatározása céljából.



### 9.16. ábra A ( $0 < n < 1$ ) politrópikus expanzió folyamat térfogatváltozási munkaterületének szerkesztése

A 9.16. ábrán látható ( $0 < n < 1$ ) politrópikus expanzió folyamat esetében a térfogatváltozási munka meghatározásához írhatjuk

$$q_{1,2} = |q_{1,2}|, \quad u_2 - u_1 = |u_2 - u_1|. \quad (9.78)$$

A kérdéses munka

$$w_{1,2} = u_2 - u_1 - q_{1,2} = |u_2 - u_1| - |q_{1,2}| = -\{|q_{1,2}| - |u_2 - u_1|\}, \quad (9.79)$$

vagyis a területeket *ki kell vonni* egymásból és mivel a kivonandó terület a nagyobb, a munka előjele negatív lesz. Megjegyezzük, hogy a munka előjele a folyamat menete alapján már előbb meghatározható (9.12. vagy 9.13. ábra alapján).

A 9.17. ábrán látható folyamat ( $1 < n < \kappa$ , expenzió) esetében a technikai munka grafikus meghatározása látható. A technikai munka kifejezése

$$w_{t1,2} = i_2 - i_1 - q_{1,2}. \quad (9.80)$$

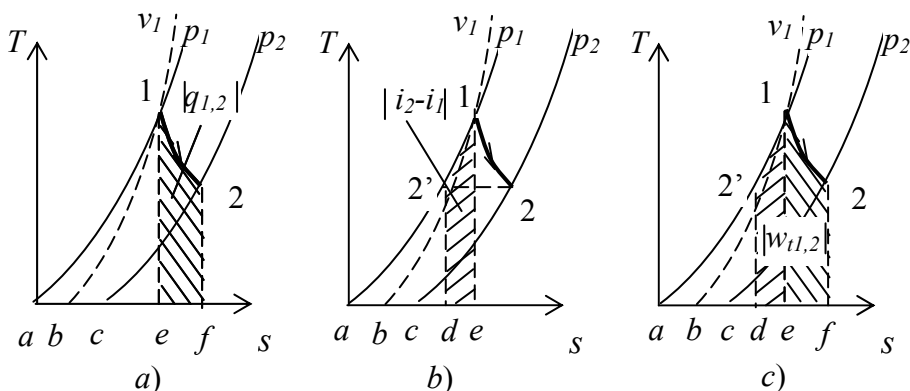
Ehhez szükséges mennyiségek

$$q_{1,2} = |q_{1,2}| \quad \text{és} \quad i_2 - i_1 = -|i_2 - i_1|. \quad (9.81)$$

Ezzel

$$w_{t1,2} = -|i_2 - i_1| - |q_{1,2}| = -\{|i_2 - i_1| + |q_{1,2}|\}, \quad (9.82)$$

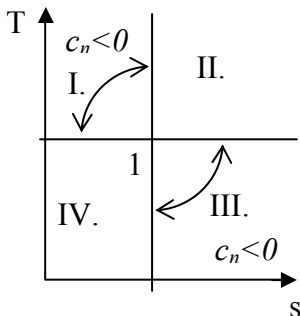
tehát a két területet most *össze kell adni*. (9.17/c. ábra 1-2'-d-f-2-1 terület) A hőmennyiség és a belsőenergia- vagy entalpiaváltozás területei közötti műveletek vonatkozásában a következő megállapítások tehetők.



### 9.17. - ábra Az ( $1 < n < \kappa$ ) politrópikus expenzió folyamat technikai munkaterületének szerkesztése

A (9.77) egyenletekből következik, hogy amennyiben a folyamattal kapcsolatos hőmennyiség és az entalpiaváltozás (vagy a belsőenergia-változás) ellentétes előjelű, – a munka a két terület ( $q_{1,2}$  és  $\Delta u$  vagy  $\Delta i$ ) összege lesz (9.17. ábra). Ha a fenti mennyiségek azonos előjelűek – a területeket *ki kell vonni* egymásból (9.16. ábra).

Mivel  $q_{1,2} = c_n(T_2 - T_1)$ ,  $\Delta u = c_v(T_2 - T_1)$ ,  $\Delta i = c_p(T_2 - T_1)$



a  $q_{1,2}$  és  $\Delta u$  (vagy  $\Delta i$ ) akkor lesz ellentétes előjelű, ha  $c_n < 0$ .

Ez – mint a 9.9. ábrából kitűnik – az  $1 < n < \kappa$  kitevőjű politrópikus folyamatokra igaz, vagyis melyek a T-s diagramban az 1 pontból kiindulva a bejelölt (I. és III.) negyedekben haladnak (9.18. ábra).

A szerkesztés során a 9.18. ábra szerinti II. és IV. negyedekben elhelyezkedő folyamatoknál – amennyiben a szerkesztés a leírtak szerint történik – a területek részben fedik egymást, vagyis a különbségképzés automatikusan végbemegy (9.16. ábra).

**9.18. ábra - A politrópikus fajhő előjele**

– a területen részben fedik egymást, vagyis a különbségképzés automatikusan végbemegy (9.16. ábra).

*Összefoglalva:* az adott folyamattal kapcsolatos munkaterületek megszerkesztéséhez meg kell határozni

- a folyamattal kapcsolatos hőmennyiségnek megfelelő területet (a folyamat görbéje alatti terület) és
- térfogatváltozási munka esetén a belsőenergia-változás területét (állandó térfogati görbék alatti területek különbsége)
- technikai munkához az entalpiaváltozás területét (állandó nyomásgörbék alatti területek különbsége).

Mind a belső energia, mind az entalpia különbségképzéshez a kisebbik területet toljuk el (a T - s diagramban a folyamat kisebb hőmérsékletű kezdeti vagy végpontját átvetítjük a másik nyomás vagy térfogati görbére).

Amennyiben a hőmennyiség és a belsőenergia-változás (vagy entalpiaváltozás) területe egymás mellé adódik, a munka a két terület összege, részleges fedés esetén a munkaterület a másik által nem fedett területrészt lesz. A munka előjele a folyamat ábrázolása után az előzőekben leírtak szerint a területszerkesztés előtt eldönthető.

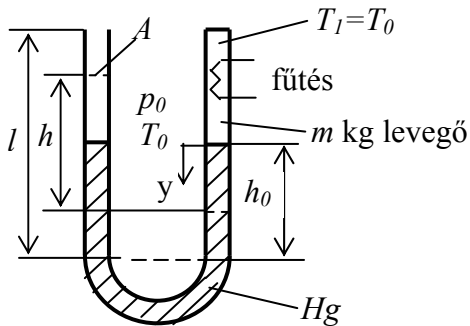
## 10. Speciális feladatok az I. főtétel témaköréből

### 10.1. Nem politrópikus folyamatok

#### Példa (1):

Egy U-alakú cső egyik vége zárt, a másik nyitott (10.1. ábra). A függőleges száruk  $l$  hosszúságúak, s a cső állandó keresztmetszetű ( $A$ ). Kezdetben a higany  $h_0$  magasságban a 10.1. ábra szerinti helyzetben van a függőleges szárukban. Mennyi hőt kell közölni az elzárt részben levő levegővel, hogy a higany szintjének eltérése a két ágban  $h$  értékű legyen? (A bevezetett hő teljes egészében a gázt melegíti!) Adott még: gázállandó ( $R$ ), adiabatikus kitevő ( $\kappa$ ), a higany sűrűsége ( $\rho_{Hg}$ ), a környezeti nyomás ( $p_0$ ).

#### Megoldás:



10.1. ábra - U-alakú cső egyik ágában fűtéssel

Írjuk fel az első főtételt a fűtött térre

$$U_2 - U_1 = Q_{1,2} + W_{1,2}. \quad (10.1)$$

A térfogatváltozási munka

$$W_{1,2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (10.2)$$

Nyomás az adott térben

$$p = p_0 + 2\rho_{Hg}gy. \quad (10.3)$$

ahol  $y$  – a higanyfelület süllyedése

a fűtött ágban.

A fűtött gáz kezdeti térfogata  $V_1 = A(l - h_0)$ .

A gáz térfogatának változása a folyamat során

$$V = V_1 + Ay, \quad (10.4)$$

elemi térfogatváltozás

$$dV = A dy. \quad (10.5)$$

A folyamat egyenlete

$$p = p_0 + 2\rho_{Hg}g \frac{V - V_1}{A} = p_0 - \frac{2\rho_{Hg}gV_1}{A} + \frac{2\rho_{Hg}g}{A}V. \quad (10.6)$$

Látható, hogy a  $p=f(v)$  függvénykapcsolat lineáris, a folyamat nem politrópikus.

A (10.2) egyenlet

$$W_{1,2} = -\int_{y_1}^{y_2} (p_0 + 2\rho_{Hg}gy) A dy, \quad (10.7)$$

ahol  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = \frac{h}{2}$ .

A térfogatváltozási munka értéke

$$W_{1,2} = -\int_0^{\frac{h}{2}} (p_0 + 2\rho_{Hg}gy) A dy = -\left( p_0 \frac{h}{2} + \rho_{Hg}g \frac{h^2}{4} \right) A. \quad (10.8)$$

Belsőenergia-változás

$$U_2 - U_1 = mc_v(T_2 - T_1) = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\kappa - 1}. \quad (10.9)$$

Nyomás és térfogat a végállapotban

$$V_2 = V_1 + A \frac{h}{2}, \quad (10.10)$$

$$p_2 = p_0 + \rho_{Hg}gh. \quad (10.11)$$

A folyamat során közlendő hő mennyisége

$$Q_{1,2} = U_2 - U_1 - W_{1,2} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\kappa - 1} + p_0 \frac{h}{2} + \rho_{Hg}g \frac{h^2}{4}. \quad (10.12)$$

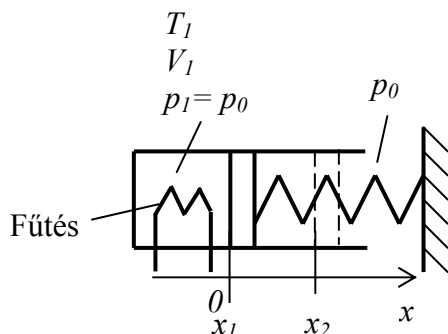
### Példa (2):

Vízszintes,  $A_d$  keresztmetszetű hengerben  $V_1$  térfogatú,  $t_1$  hőmérsékletű, a környezettel megegyező  $p_0$  nyomású levegő van. A dugattyút egy hosszú – kezdetben erőmentes –  $k_r$  erősségű rugó támasztja meg. A henger fűtése következtében a levegő a rugóerőt legyőzve eredeti térfogatának másfél-



szerezésre tágul. Határozza meg a közölt hőmennyiséget! Ismert továbbá a gázállandó és az adiabatikus kitevő.

**Megoldás:**



Kezdeti állapotban a rugóerő zérus.

$$x = x_1 = 0 \Rightarrow F_r = 0.$$

A gáz tágulásakor a rugóerő értéke

$$F_r = k_r x.$$

**10.2. ábra - Rugó ellenében táguló gáz**

Alkalmazzuk a folyamatra az első főtételt

$$U_2 - U_1 = Q_{1,2} + W_{1,2} = Q_{1,2} - \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (10.13)$$

A belsőenergia-változás

$$U_2 - U_1 = mc_v(T_2 - T_1) = \frac{mR}{\kappa - 1}(T_2 - T_1) = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\kappa - 1}. \quad (10.14)$$

A térfogat

$$V = V_1 + A_d x. \quad (10.15)$$

Elemi térfogatváltozás

$$dV = A_d dx. \quad (10.16)$$

Végtérfogat

$$V_2 = V_1 + A_d x_2.$$

A végtérfogathoz tartozó dugattyú elmozdulás

$$x_2 = \frac{V_2 - V_1}{A_d}. \quad (10.17)$$

A nyomás

$$p = p_0 + \frac{xk_r}{A_d}. \quad (10.18)$$

A folyamat egyenletét  $p=f(v)$  alakban  $x$  behelyettesítésével kapjuk meg

$$p = p_0 + \frac{(V - V_1)k_r}{A_d^2} = p_0 - \frac{V_1 k_r}{A_d^2} + \frac{k_r}{A_d^2} V, \quad (10.19)$$

mely egy tengelymetszetes egyenes egyenlete.

Csak az origón áthaladó egyenes által leírt folyamat elégíti ki a politrópikus folyamat ( $pv^n = \text{állandó}$ ) követelményeit, amikor  $n = -1$ .

Ez  $p_0 = \frac{V_1 k_r}{A_d^2}$  esetén áll fenn.

$$\int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{x_1}^{x_2} \left( p_0 + \frac{xk_r}{A_d} \right) A_d dx = \int_{x_1}^{x_2} p_0 A_d dx + \int_{x_1}^{x_2} xk_r dx, \quad (10.20)$$

$$\begin{aligned} \int_{V_1}^{V_2} p dV &= \int_{x_1}^{x_2} p_0 A_d dx + \int_{x_1}^{x_2} k_r x dx = \\ &= p_0 A_d (x_2 - x_1) + \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} k_r = p_0 A_d x_2 + \frac{k_r x_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

A hőmennyiség

$$Q_{1,2} = U_2 - U_1 + \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\kappa - 1} + p_0 A_d x_2 + \frac{k_r x_2^2}{2}. \quad (10.22)$$

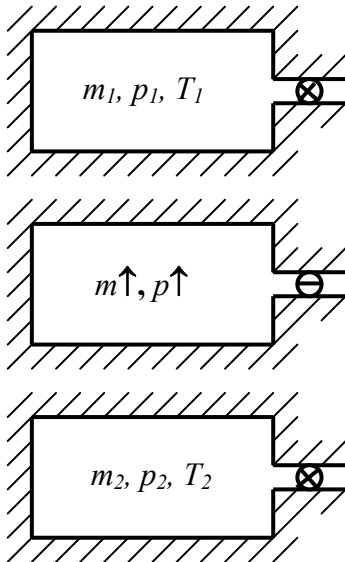
## 10.2. Jendrassik-indítás elve

### Példa:

Egy hőszigetelt tartályban a levegő jellemzői,  $p_1, t_1$ , a környezeté  $p_0, t_0$  ( $p_1 < p_0$ ). Meghatározandó a tartályban lévő közeg hőmérséklete abban az esetben, ha a  $p_0, t_0$  állapotú levegő a tartályba (nyomás egyenlőségig) beáramlik. Adott az adiabatikus kitevő ( $\kappa$ ).

### Megoldás:

A folyamatban a 10.3. ábra szerinti három három szakaszt különböztethetjük meg :



10.3. ábra - Beáramlás tartályba

Zárt rendszer energiatartalma  
= belső energia (kezdeti áll.)

$$U_1 = m_1 c_v T_1. \quad (10.23)$$

Beáramló közeg által bevitt energia =  
Belső energia + betolási munka = entalpia

$$U_0 + p_0 V_0 = I_0. \quad (10.24)$$

Zárt rendszer energiatartalma  
= belső energia (végállapot)

$$U_2 = m_2 c_v T_2. \quad (10.25)$$

Energia mérleg

$$U_1 + U_0 + p_0 V_0 = U_2. \quad (10.26)$$

A belső energia és az entalpia nullértékét 0 K-nál felvéve

$$m_1 c_v T_1 + m_0 c_p T_0 = m_2 c_v T_2, \quad (10.27)$$

ahol a beáramló levegőtömeg

$$m_0 = m_2 - m_1. \quad (10.28)$$

A tömegeket állapotegyenlettel felírva és behelyettesítve (10.27)-be, kapjuk

$$\frac{p_1 V}{RT_1} c_v T_1 + \left( \frac{p_1 V}{RT_1} - \frac{p_2 V}{RT_2} \right) c_p T_0 = \frac{p_2 V}{RT_2} c_v T_2. \quad (10.29)$$

Egyszerűsítések után a (10.29) egyenlet a következő alakot ölti

$$p_1 + \left( \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) \kappa T_0 = p_2. \quad (10.30)$$

Ebből a hőmérséklet a 2. állapotban

$$T_2 = \frac{p_2}{\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2 - p_1}{\kappa T_0}} \quad (10.31)$$

$$\text{vagy } T_2 = \frac{\kappa T_0 T_1}{\kappa T_0 \frac{p_1}{p_2} - \frac{(p_2 - p_1)}{p_2} T_1} = \frac{\kappa T_0}{\left( \kappa \frac{T_0}{T_1} + 1 \right) \frac{p_1}{p_2} - 1}. \quad (10.32)$$

Amennyiben  $T_1 = T_0$ , a (10.32) egyenlet a következő alakúra módosul

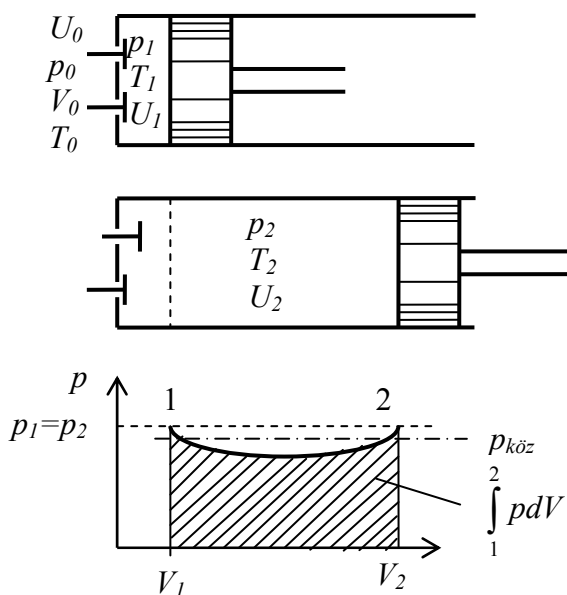
$$T_2 = \frac{\kappa T_0}{(\kappa + 1) \frac{p_1}{p_2} - 1}, \quad (10.33)$$

vagyis  $p_1/p_2 < 1$  esetén  $T_2 > T_0$ , azaz a hőmérséklet nő.

A hőmérsékletnövekedést az eredményezi, hogy a környezet betolási munkája belsőenergiává alakul.

Hideg időben kisebb sűrítési viszonyú dízelmotornál a sűrítés vég hőmérséklete nem éri el a tüzelőanyag gyulladásához szükséges hőmérsékletet. Az indítás megkönnyítésére Jendrassik György, a Ganz Gyár világhírű motortervező mérnöke a fenti példában meglévő gondolatot alkalmazta. Az általa javasolt és róla elnevezett módszer szerint a szívólöket alatt a vezérlés a szívószelepet késleltetve nyitja ki, így a hengerben vákuum jön létre és a szívólöket végén a hengerben – a fenti példában kapott eredményhez hasonlóan – jelentős hőmérsékletnövekedés következik be, amely már lehetővé teszi a gyújtást. *Ez a Jendrassik-indítás elve.*

A dízelmotor hengerében lejátszódó folyamatot a következőképpen modellezhetjük:



**10.4. ábra - A Jendrassik-indítás során a hengerben lejátszódó folyamat**

Az energia mérleg

$$U_1 + U_0 + p_0 V_0 = U_2 + \int_1^2 p dV. \quad (10.34)$$

Itt  $\int_1^2 p dV$  a környezettel szemben végzett munka, melyet a 10.4. ábra

alaján kifejezhetjük közepes nyomással

$$U_1 + I_0 = U_2 + p_{köz} (V_2 - V_1), \quad (10.35)$$

ahol a (10.23) – (10.25) egyenletek alapján helyettesítve

$$m_1 c_v T_1 + m_0 c_p T_0 = m_2 c_v T_2 + p_{köz} (V_2 - V_1), \quad (10.36)$$

$$m_0 = m_2 - m_1, \quad (10.37)$$

$$m_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_2}, \quad (10.38)$$

$$m_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1}, \quad (10.39)$$

$$\frac{p_1 V_1}{RT_1} c_v T_1 + \left( \frac{p_1 V_1}{RT_1} - \frac{p_2 V_2}{RT_2} \right) c_p T_0 = \frac{p_2 V_2}{RT_2} c_v T_2 + p_{köz} (V_2 - V_1). \quad (10.40)$$

Ahol  $V_2 = \varepsilon V_1$ , indításkor:  $T_1 = T_0$ ;  $p_1 = p_2 = p_0$ .

$$\frac{T_0}{T_2} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{(\varepsilon - 1)}{\kappa \varepsilon} + \frac{(\kappa - 1)(\varepsilon - 1)}{\kappa \varepsilon} \frac{p_{köz}}{p_0}. \quad (10.41)$$

A (10.41) egyenlet bal oldalához hozzáadva és levonva a  $\frac{(\kappa - 1)(\varepsilon - 1)}{\kappa \varepsilon}$  kifejezést, majd rendezve – kapjuk

$$T_2 = \frac{T_0}{1 - \frac{(\kappa - 1)(\varepsilon - 1)}{\kappa \varepsilon} \left[ 1 - \frac{p_{köz}}{p_0} \right]}, \quad (10.42)$$

vagyis  $T_2 > T_0$ . A felmelegedés oka: a közeg a környezettől nagyobb munkát vesz fel  $[p_0(V_2 - V_1)]$ , mint amennyit a környezettel szemben véggez  $[p_{köz}(V_2 - V_1)] \rightarrow (10.4. \text{ ábra})$ . A felmelegedés alapvetően a  $p_{köz}/p_0$  viszonytól függ és csak kismértékben a kompresszió viszonytól [21].

### 10.3. Változó tömegű rendszerek

#### 10.3.1. A kiáramlás állandó hőmérsékletű tartályból

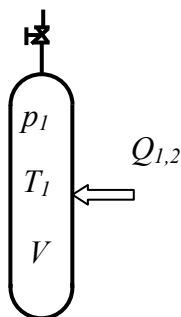
##### Példa (1):

A  $V$  térfogatú tartályból (10.5. ábra) a  $p_1$  nyomású gáz tömegének  $\alpha = \frac{m_{\text{távozó}}}{m_{\text{kezdő}}}$  részét kiengedjük, miközben a hőmérséklete állandó marad.

Mennyi hőt kellett ehhez a falon keresztül a tartályba vezetni? A bevezetett hő hányadrésze távozik a kiáramló gázzal?

## Megoldás:

Mivel a kiáramlási folyamat során a tartályban lévő gáz tömege nem marad állandó, hanem csökken, ezért az izotermikus folyamat során közölt elemi hőmennyiségből kell kiindulnunk, ugyanis e hőmennyiség bevezetése során a gáztömeget állandónak tekinthetjük. A tartályban lévő gáz  $V$  térfogata és hőmérséklete állandó marad, miközben nyomása csökken.



**10.5. ábra - Fűtött tartály izotermikus kiáramlással**

Az elemi hőmennyiség

$$\delta Q = -Vdp. \quad (10.43)$$

A teljes közölt hőmennyiség

$$Q_{1,2} = \int_{p_1}^{p_2} -Vdp, \quad (10.44)$$

melyből

$$Q_{1,2} = V(p_1 - p_2). \quad (10.45)$$

A végnyomás meghatározásához írjuk fel a tömegeket a két állapotban

$$m_1 = \frac{p_1 V}{RT}, \quad m_2 = \frac{p_2 V}{RT}.$$

A végállapot és kezdeti állapot tömegeinek aránya

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{p_2}{p_1},$$

melyet az  $\alpha$  kieresztési hányaddal kifejezve kapjuk:

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 - \alpha. \quad (10.46)$$

Ezzel a végnyomás

$$p_2 = p_1(1 - \alpha). \quad (10.47)$$

A teljes közölt hő (10.45) alapján

$$Q_{1,2} = p_1 V \alpha. \quad (10.48)$$

A tartályban maradó ( $m_2$  tömegű) gáz hevítésére felhasznált hőmennyiség

$$Q_{\text{maradó}} = m_2 RT \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = p_2 V \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right). \quad (10.49)$$

A kiindulási adatokkal felírva

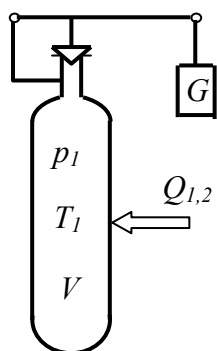
$$Q_{\text{maradó}} = p_1(1-\alpha)V \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right). \quad (10.50)$$

A kieresztett gáz fűtésére szolgáló hőmennyiséget, mint a teljes bevezetett és a maradó hőmennyiség különbségét határozzuk meg:

$$Q_{\text{távozó}} = Q_{1,2} - Q_{\text{maradó}}. \quad (10.51)$$

10.3.2. A kiáramlás során a tartályban lévő gáz nyomása állandó marad

**Példa (2):**



A 10.6. ábrán látható tartály állandó nyomást biztosító szeleppel van ellátva, mely a tartályban állandó  $p_1$  nyomást biztosít. Mennyi hőt kell a tartályba vezetni, hogy a benne lévő gáz tömegének  $\alpha = \frac{m_{\text{távozó}}}{m_{\text{kezdő}}}$  része távozzék? Mennyi hőt fordítottunk a tartályban maradó gáz hevítésére? A gáz adiabatikus kitevője  $\kappa$ .

**10.6. ábra - Fűtött tartály izobár kiáramlással**

**Megoldás:**

Az előző feladathoz hasonlóan az elemi hőmennyiség közlése során tekinthetjük a tömeget állandónak, így

$$\delta Q = m c_p dT = \frac{pV}{RT} \frac{\kappa R}{(\kappa-1)} dT = \frac{\kappa pV}{(\kappa-1)} \frac{dT}{T}, \quad (10.52)$$



ahol

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} pV = \text{állandó}.$$

A tartályba a kiáramlás során bevezetett hőmennyiség

$$Q_{1,2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} pV \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} pV \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right). \quad (10.53)$$

$$m_1 = \frac{pV}{RT_1}, \quad m_2 = \frac{pV}{RT_2}. \quad (10.54)$$

A két tömeg viszonya  $\frac{m_2}{m_1} = \frac{T_1}{T_2}$ , melyből

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (10.55)$$

A (10.46) alapján

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

A tartályba a kiáramlás során bevezetett teljes hőmennyiség a kiinduló adatokkal

$$Q_{1,2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} pV \ln\left(\frac{1}{1 - \alpha}\right).$$

A tartályban maradó gáz hevítésére fordított hőmennyiség

$$Q_{\text{maradó}} = m_2 c_p (T_2 - T_1) = m_2 \frac{\kappa R}{(\kappa - 1)} (T_2 - T_1) = \frac{\kappa}{(\kappa - 1)} pV \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right). \quad (10.56)$$

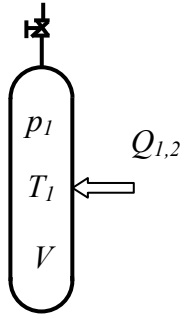
A kiindulási adatokkal

$$Q_{\text{maradó}} = \frac{\kappa}{(\kappa - 1)} pV \alpha, \quad (10.57)$$

$$Q_{\text{átvező}} = Q_{1,2} - Q_{\text{maradó}}. \quad (10.58)$$

10.3.3. A kiáramlás során a tartályban lévő gáz politrópikus ( $n = \text{állandó}$ ) állapotváltozást szenved

**Példa (3):**



**10.7. ábra - Tartály politrópikus kiáramlással**

A  $V$  térfogatú tartályból (10.7. ábra) a  $p_1$  nyomású,  $t_1$  hőmérsékletű gáz tömegének  $\alpha = \frac{m_{\text{távozó}}}{m_{\text{kezdő}}}$  részét kienged-

jük, miközben a tartályban hőközléssel  $n = \text{állandó}$  kitevőjű politrópikus folyamatot biztosítunk. Mennyi hőt kellett ehhez a falon keresztül a tartályba vezetni? A bevezetett hő hányadrésze távozik a kiáramló gázzal? A gáz adiabatikus kitevője  $\kappa$ .

**Megoldás:**

$$\delta Q = mc_n dT. \quad (10.59)$$

$$m = \frac{pV}{RT}. \quad (10.60)$$

Politrópus állapotváltozásnál a nyomás és hőmérséklet közötti kapcsolat

$$\frac{p}{p_1} = \left( \frac{T}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \text{ ebből a nyomást } p = p_1 \left( \frac{T}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (10.61)$$

behelyettesítve (10.60)-ba, majd az így kapott összefüggést a (10.59) egyenletbe

$$\delta Q = \frac{p_1 V}{RT_1^{\frac{n}{n-1}}} c_n T^{\frac{1}{n-1}} dT, \quad (10.62)$$

ahol

$$\frac{p_1 V}{RT_1^{\frac{n}{n-1}}} c_n = \text{állandó}. \quad (10.63)$$

A tartályba kiáramlás során bevezetett teljes hőmennyiség

$$Q_{1,2} = \frac{p_1 V}{RT_1^{\frac{n}{n-1}}} c_n \int_{T_1}^{T_2} T^{\frac{1}{n-1}} dT = \frac{p_1 V}{RT_1^{\frac{n}{n-1}}} c_n \frac{(n-1)}{n} \left( T_2^{\frac{n}{n-1}} - T_1^{\frac{n}{n-1}} \right) =$$

$$= p_1 V \frac{(n-\kappa)}{(\kappa-1)n} \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} - 1 \right]. \quad (10.64)$$

A hőmérsékletviszony meghatározása a kezdeti és a végállapot tömegéből

$$m_1 = \frac{p_1 V}{RT_1}, \quad m_2 = \frac{p_2 V}{RT_2}, \quad (10.65)$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}, \quad (10.66)$$

a  $\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}$  Poisson-összefüggés felhasználásával

$$\frac{m_2}{m_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (10.67)$$

melyből a hőmérsékletviszony a (10.46) összefüggés felhasználásával

$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^n = (1-\alpha)^n, \quad (10.68)$$

illetve

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^{n-1} = \left( \frac{1}{1-\alpha} \right)^{n-1} \quad (10.69)$$

és a kezdeti adatokkal

$$Q_{1,2} = p_1 V \frac{(n-\kappa)}{(\kappa-1)n} \left[ (1-\alpha)^n - 1 \right]. \quad (10.70)$$

A tartályban maradó gáz hevítésére fordított hőmennyiség

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{maradó}} &= m_2 c_n (T_2 - T_1) = \frac{p_2 V}{RT_2} c_n (T_2 - T_1) = \\
 &= p_2 V \frac{(n - \kappa)}{(\kappa - 1)(n - 1)} \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right),
 \end{aligned}
 \tag{10.71}$$

ahol a (10.68) kifejezés és a Poisson-egyenlet alapján

$$p_2 = p_1 (1 - \alpha)^n. \tag{10.72}$$

A kezdeti adatokkal

$$Q_{\text{maradó}} = p_2 V \frac{(n - \kappa)}{(\kappa - 1)(n - 1)} \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 - \alpha} \right)^{n-1} \right]. \tag{10.73}$$

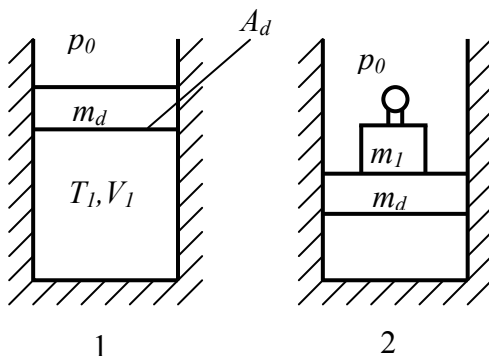
A kiáramló gázzal távozó hőmennyiség

$$Q_{\text{távozó}} = Q_{1,2} - Q_{\text{maradó}}. \tag{10.74}$$

A politrópikus kiáramlásra levezetett összefüggésekből értelemszerűen származtathatók (bizonyos esetekben határértékként) az előző folyamatok eredményei.

#### 10.4. Nem egyensúlyi adiabatikus folyamat

**Példa:**



Egy adiabatikus falakkal és dugattyúval rendelkező hengerben  $m$  tömegű  $T_1$  hőmérsékletű  $p_1$  nyomású gáz van. A nyomást súlyterheléses dugattyú biztosítja. Egy adott időpillanatban egy  $m_1$  tömegű súly ráhelyezésével ugrásszerűen növeljük a nyomást  $p_2$ -ig. Meghatározandó a térfogat és hőmérséklet a 2. állapotban. Ismert még: a gáz relatív molekula-

#### 10.8. ábra - Ugrásszerű nyomásnövelés

tömege ( $M$ ), az univerzális gázállandó  $R_M$  és az adiabatikus kitevő ( $\kappa$ ).

### Megoldás:

Az energiamegmaradás törvénye értelmében a rendszer első és második állapota közötti belsőenergia-változás a környezeti nyomásból származó erő, a dugattyú, valamint a ráhelyezett súly súlyereje által végzett munkával egyenlő.

$$U_1 + [p_0 A_d + (m_1 + m_d)g] \Delta h = U_2. \quad (10.75)$$

A második állapotban a fentiekben részletezett erők és a gáz  $p_2$  nyomásából származó erő egyensúlyban van, vagyis

$$p_0 A_d + (m_1 + m_d)g = p_2 A_d, \quad (10.76)$$

ezzel a (10.75) egyenlet átrendezve

$$U_2 - U_1 = p_2 A_d \Delta h \quad (10.77)$$

alakba írható. Ebben az összefüggésben a dugattyúfelület és az elmozdulás szorzata a gáz térfogatának megváltozásával egyenlő. Ezt figyelembe véve

$$U_2 - U_1 = p_2 (V_1 - V_2). \quad (10.78)$$

A (10.78) egyenlet megfelelő átalakításai eredményeképpen megkapjuk a véghőmérséklet kifejezését, mint a térfogatok függvényét

$$T_2 = \frac{T_1}{\kappa \left[ 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{V_1}{V_2} \right]}. \quad (10.79)$$

A nyomások ismeretében az (10.78) egyenlet

$$m c_v (T_2 - T_1) = p_2 m R \left( \frac{T_1}{p_1} - \frac{T_2}{p_2} \right) \quad (10.80)$$

alakba írható, melyből átalakítások után kapjuk

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\kappa - 1) p_2}{\kappa p_1} + \frac{1}{\kappa} = \frac{(\kappa - 1) (p_2 - p_1)}{\kappa p_1} + 1. \quad (10.81)$$

Egyensúlyi (ideális) adiabatikus folyamat esetén a hőmérsékletviszony az ismert

$$\frac{T_{2s}}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{(\kappa-1)}{\kappa}} \quad (10.82)$$

egyenlet szerint számítható.

A két képlet összevetéséből kitűnik, hogy ugyanazon nyomásviszony esetén az ugrásszerű nyomásnövelés mindig nagyobb véghőmérsékletet eredményez, mint az ideális (egyensúlyi) folyamat.

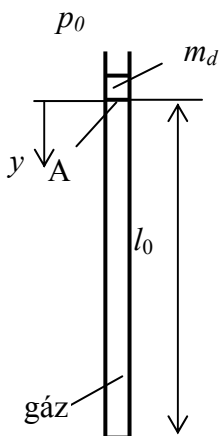
A gáz térfogatát a végállapotban a hőmérséklet ismeretében az állapot-egyenlet segítségével kapjuk meg:

$$V_2 = \frac{mRT_2}{p_2}. \quad (10.83)$$

Látható, hogy a végtérfogat is nagyobb lesz, mint egyensúlyi folyamattal lejátszódó nyomásnövelésnél. A nem egyensúlyi folyamatra kapott eredmény annál inkább megközelíti az ideális folyamatét, mennél kisebb részletekben rakjuk a dugattyúra az  $m_1$  tömeget.

## 10.5. Gázoszlop lengése (légrugó)

**Példa:**



Hosszú, alsó végén zárt függőleges kör keresztmetszetű csőben súrlódás nélkül mozoghat egy dugattyú, melynek  $m$  tömegéhez képest a csőben levő ideális gáz tömege elhanyagolható. Egyensúly esetén a dugattyú a cső aljától  $l_0$  távolságra van. Meghatározható: az egyensúlyi helyzetéből kilendített dugattyú kis lengéseinek mozgásegyenlete és periódusideje, ha a gáz állapotváltozása izotermikus, a cső keresztmetszete  $A$ , környezeti nyomás  $p_0$ .

**10.9. ábra - Gázoszlop dugattyúval**

### Megoldás:

Kiindulási állapot: egyensúlyi.

A mozgásegyenletet a 10.9. ábra jelöléseit követve

$$m_d \frac{d^2 y}{dt^2} - \Delta p A = 0 \quad (10.84)$$

alakban írhatjuk, ahol  $\Delta p$  - a gáz nyomásváltozása a dugattyú egyensúlyi helyzetből történő kismértékű kilendítése hatására.

Az izotermikus állapotváltozás egyenlete

$$pV = \text{állandó}, \quad (10.85)$$

melyből differenciálással kapjuk

$$d(pV) = p dV + V dp = 0 \quad (10.86)$$

és

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V}. \quad (10.87)$$

A (10.63) differenciálegyenletet a kis változásokat figyelembe véve átírjuk differenciaegyenlet alakba

$$\frac{\Delta p}{p_1} = -\frac{\Delta V}{V_1}, \quad (10.88)$$

itt a gáz térfogatváltozása a kis dugattyú lengés hatására

$$\Delta V = -A y. \quad (10.89)$$

A kezdeti térfogat és kezdeti nyomás

$$V_1 = AL_0; \quad p_1 = \frac{Ap_0 + m_d g}{A}. \quad (10.90)$$

Ezeket az értékeket a (10.64) egyenletbe helyettesítve és kifejezzük a  $\Delta p$  nyomásváltozást

$$\Delta p = -p_1 \frac{\Delta V}{V_1} = -\frac{(Ap_0 + m_d g)y}{AL_0} \quad (10.91)$$

és a (10.60) mozgásegyenletbe helyettesítjük

$$m_d \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{A p_0 + m_d g}{L_0} y = 0, \quad (10.92)$$

mely 
$$k^2 = \frac{A p_0 + m_d g}{m_d L_0}$$

helyettesítéssel

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y = 0 \quad (10.93)$$

alakot ölti.

A kapott homogén lineáris differenciálegyenlet megoldása:

A karakterisztikus egyenlet

$$p^2 + k^2 = 0. \quad (10.94)$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$p_1 = jk, \quad p_2 = -jk. \quad (10.95)$$

A (10.93) differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}. \quad (10.96)$$

Trigonometrikus alakban

$$y = B_1 \cos kt + B_2 \sin kt, \quad (10.97)$$

melyből  $B_1 = a \sin \varepsilon$  és  $B_2 = a \cos \varepsilon$  helyettesítéssel kapjuk

$$y = a \sin(kt + \varepsilon). \quad (10.98)$$

A függvény periódusa  $2\pi$ , így írható

$$y = a \sin[k(t + T) + \varepsilon] = a \sin(kt + \varepsilon + 2\pi), \quad (10.99)$$

ahol  $T$  – a periódusidő. A (10.99) egyenletből következik

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{A p_0 + m_d g}{m_d L_0}}}. \quad (10.100)$$



## 11. A termodinamika második főtétele

### 11.1. A második főtétel jelentősége

A termodinamika első főtétele, amely a természet általános törvényének – az energia megmaradás törvényének – alkalmazása termikus folyamatokra, kapcsolatot teremt az állapotváltozás során a rendszerrel közölt hő, munka és a rendszer belsőenergia-változása között.

Kimondja, hogy a hő átalakulhat mechanikai munkává, a munka hővé, de nem határozza meg az energiaátalakulásokhoz szükséges feltételeket. Az első főtétel tehát a folyamatokat csak mennyiség) oldalról jellemzi, de nem ad választ a következő kérdésekre:

- Van-e a folyamatok lefolyásának kitüntetett iránya?
- Milyen feltételek mellett lehet valamely gépből folyamatosan munkát nyerni?
- A hő milyen mértékben (hatásfokkal) alakítható át mechanikai munkává?

Ezekre a kérdésekre a termodinamika második főtétele segítségével kapjuk meg a választ.

A második főtételt először a tapasztalat alapján termikus folyamatokra fogalmazták meg, ugyanakkor ez a főtétel is, az elsőhöz hasonlóan a természet egyik alaptörvénye és nagy jelentősége van más tudományágak (fizika, kémia stb.) esetében is.

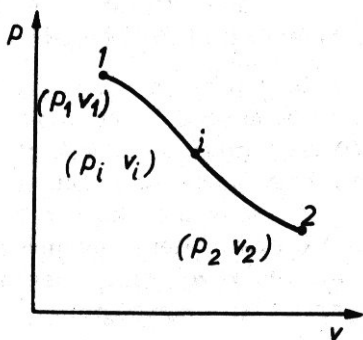
A termodinamika második főtételének mély filozófiai tartalma van. Anélkül, hogy jelentőségét túlbecsülnénk, kijelenthetjük, hogy a tudomány történetében kevés olyan törvény ismert, amelyik ilyen világosan tükröz világnézetek közötti különbséget.

A második főtételből levonható következtetéseknek a természetben lezajló folyamatokra történő helytelen alkalmazása következtében jutott az elmúlt század végének sok kiemelkedő tudósa (Clausius, Ostwald és mások) az un. "hőhalál" elmélethez.

A műszaki hőtanban a második főtétel azért fontos, mert segítségével meghatározhatók a természetben lezajló folyamatok feltételei, a folyamatok iránya, valamint egyszerű és szemléletes módszert ad a hőerőgépek gazdaságosságának megítéléséhez.

A második főtétel megfogalmazása tulajdonképpen az előzőekben felvett kérdésekre adott válaszokkal történhet. Mielőtt azonban erre rátérnénk, vizsgáljunk meg néhány, a természetben előforduló jellemző folyamatot, tisztázzunk néhány fogalmat, amelyek a második főtétel megfogalmazásához, megértéséhez feltétlenül szükségesek.

## 11.2. Reverzibilis és irreverzibilis folyamatok



11.1. ábra - Folyamat p-v diagramban

A termodinamika egyik legfontosabb fogalma a reverzibilis (megfordítható) és az irreverzibilis (nem megfordítható) folyamatok fogalma.

A termodinamikai folyamat a rendszer állapotának (állapotjelzőinek) folytonos változása. A  $p - v$  diagramban a rendszer állapota a  $p_i, v_i$  koordinátájú ponttal, a folyamat pedig az 1- $i$ -2 görbével jellemezhető (1. ábra). Minden adott állapotban – a kezdetiben (1), közbensőben ( $i$ ) és a végállapotban (2) – a hőmérséklet és nyomásértékek a rendszer minden pont-

jában azonosak. Más szóval, a rendszernek minden állapotban termodinamikai egyensúlyban kell lennie.

Az 1 és 2 pontok között ugyanazon az úton két folyamatot lehet megvalósítani, 1- $i$ -2 és visszafelé a 2- $i$ -1 úgynevezett egyenes és megfordított folyamatokat.

Valamely folyamat akkor reverzibilis (megfordítható), ha ugyanazon az úton, de ellenkező irányba megismételve a folyamatot mind a rendszer, mind annak környezete a kiindulási állapotba jut. Reverzibilis folyamatok esetén a megfordított folyamat mintegy „tükörképe” az egyenes folyamatnak.

Ha például az egyenes folyamatban a rendszerrel hőt közlünk, akkor a megfordítottban a rendszerből ugyanannyi hőt el kell vonni.

Ha a megfordíthatóság feltételei nem teljesülnek, irreverzibilis (nem megfordítható) folyamatokról beszélünk.

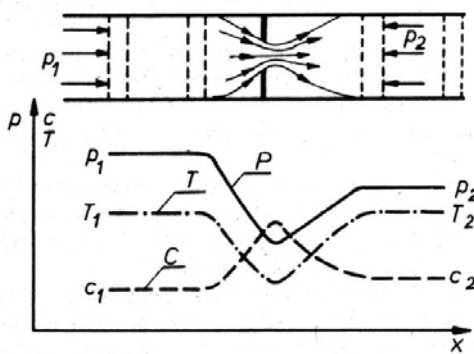
A reverzibilis folyamatra példaként a súrlódás nélküli inga lengési folyamatát lehet megemlíteni. Egy periódus alatt az inga visszatér kiindulási helyzetébe, ugyanakkor sem a rendszerben (inga), sem annak

környezetében nem marad nyoma a periódus során bekövetkezett változásoknak. A mechanikai folyamatok súrlódás nélkül mind reverzibilisek lennének. A valóságban azonban a súrlódás mindig jelentkezik, s ez, mint a későbbiekben meglátjuk, irreverzibilitást eredményez.

A természetben lejátszódó folyamatok általában irreverzibilisek. Nézzünk néhány példát.

a) Ha egy testet egy felületen valamely irányba eltolunk (egyenes folyamat) a *súrlódás* legyőzésére munkát kell végeznünk. Ez a munka hővé alakul, amit a környezet vesz át. Ha ezután a testet ugyanazon az úton, de ellentétes irányban visszajuttatjuk eredeti helyére, újra munkát kell befektetni, ami ismét hővé alakul, s ez is a környezetbe megy át. Igaz, hogy a test visszajut eredeti állapotába, de a leirt mechanikai folyamat nem reverzibilis, mivel a rendszer környezetének állapota nem lesz a kiindulási. Ez a folyamat akkor lenne reverzibilis, ha visszatoláskor a test hőt venne fel a környezetéből és ez a hő maradéktalanul visszaalakulna az előző folyamat során befektetett mechanikai munkává. Ez azonban teljesen ellenében áll a tapasztaltakkal. Az irreverzibilitás okozója a súrlódás.

b) Tipikusan irreverzibilis folyamat a *fojtás*. Fojtásnak azt a folyamatot nevezzük, amelynek során az átáramlási keresztmetszet helyi szűkítése



**11.2. ábra - Állapotjelzők változása fojtáskor**

(fojtása) következtében az áramló közeg nyomása lecsökken úgy, hogy közben munkát nem végez.

A csővezetékben minden ellenállás (csapok, szelepek, tolózárak stb.) fojtást, illetve nyomásesést idéz elő. A nyomásesés mértéke függ az áramló közeg tulajdonságaitól, állapotától, a szűkítés mértékétől és az áramlási sebességtől.

A fojtás során az áramló közeg munkavégző-képessége csökken, így a fojtás veszteséget okoz. Bonyolult esetekben azonban szándékosan hozzuk létre (pl. gőzturbinák szabályozásánál, hűtőgépeknél, mennyiségmérésnél) egyszerűsége miatt.

A fojtásnál a következő folyamatok játszódnak le:

A szűkítőnyíláson (11.2 ábra) átáramló közeg kinetikai energiája és sebessége ( $c$ ) megnő, viszont a nyomás ( $p$ ) és hőmérséklete ( $T$ ) lecsökken. A szűkítőnyílást elhagyva a hirtelen keresztmetszet-növekedés következtében az átáramló közeg örvényleni kezd. Kinetikai energiájának egy része örvényképzésre fordítódik és hővé alakul. Ezenkívül hővé alakul a surlódás leküzdésére fordított munka is. Ezeket a hőmennyiségeket az áramló közeg veszi fel, melynek eredményeképpen hőmérséklete megváltozik. A szűkítőnyílás után, amikor a közeg teljesen kitölti a rendelkezésre álló keresztmetszetet, sebessége lecsökken, nyomása pedig megnő, de nem a kezdeti, hanem annál alacsonyabb értékig. A sebesség is megváltozhat a kezdetihez képest a nyomáscsökkenés miatti fajtérfogat-növekedés eredményeképpen, bár a sebességnövekedés olyan kicsi, hogy elhanyagolhatjuk.

Amennyiben feltételezzük, hogy a fojtási folyamat adiabatikus, az első főtétel (7.46) egyenlete alapján a fojtás előtti és utáni teljes entalpiák azonosak

$$i_2^* = i_1^*,$$

melyből a sebességek azonosságának feltételezésével kapjuk

$$i_2 = i_1.$$

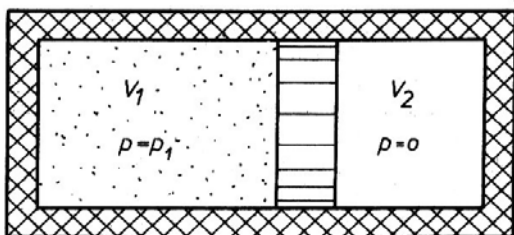
*Tehát a fojtás utáni és fojtás előtti entalpia megegyezik.* Ideális gáz esetén mivel az entalpia csak a hőmérséklet függvénye, a hőmérsékletek is azonosak lesznek.

Megjegyezzük, hogy nem állandó entalpiájú, ill. izentalpikus folyamatról van szó, hiszen mind a hőmérséklet, mind az entalpia a szűkítőnyíláson áthaladva változik.

A fojtáskor lezajló folyamatok önmaguktól visszafelé nem ismétlődnek meg, mivel a tapasztalat szerint a közeg a kisebb nyomású térből nagyobb nyomású térbe nem képes áramolni. Ahhoz, hogy a rendszert visszavigyük kezdeti állapotába, a kisebb nyomású térben levő gáz nyomását kompresszióval az eredeti értékre kell növelni, majd az eredeti hőmérsékletre kell hűteni, s végül a szűkítő nyíláson át kell tolni. A környezetben a kiindulási állapot akkor állna vissza, ha az elvont hőmennyiség visszaalakulna a kompressziómunkának megfelelő mechanikai munkává. Ez azonban a tapasztalatnak ellentmond. Mivel a

környezetben a kiindulási állapotot maradéktalanul nem tudjuk visszaállítani, így a fojtás is irreverzibilis folyamat. Az irreverzibilitás oka a véges áramlási sebesség (a szűkítőnyílásban). Ha a fojtási folyamat végtelen lassan játszódna le, akkor a szűkítőnyílásban a sebesség nagyon kicsi lenne és nyomásveszteség lényegében nem jönne létre.

c) Hasonlóan irreverzibilis folyamat valamely gáz adiabatikus expanziója vákuumba, az un. *szabad expanzió*.

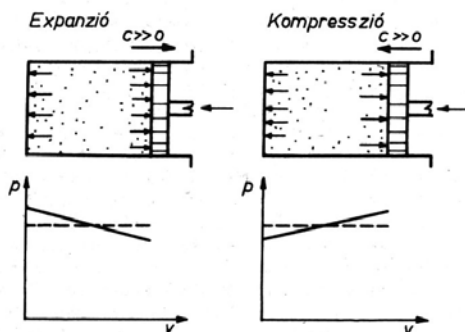


11.3. ábra - Szabad expanzió

akkor állna vissza, ha az elvont hőmennyiség visszaalakulna a sűrítési munkának megfelelő mechanikai munkává. Ez a tapasztalat szerint nem történik meg, így ez a folyamat is irreverzibilis.

Az irreverzibilitás oka a mechanikai egyensúly hiánya a rendszer és környezete között.

d) Vizsgáljunk meg egy termikusan szigetelt hengerben lezajló adiabatikus expanziót.



11.4. ábra - Véges dugattyúsebesség hatása

A  $V_1$  térfogata gáz az expanzió során  $V_1 + V_2$  térfogatra tágul, közben munkát nem végez. Ahhoz, hogy a rendszer eredeti állapotába jusson a környezettel vett munka segítségével a gázt  $V_1$  térfogatra kell sűríteni, majd azt eredeti hőmérsékletére hűteni. A környezetet tekintve a kiindulási állapot

A dugattyú súrlódásmentesen, de véges sebességgel mozog (11.4. ábra). Ez esetben az expanzió során munkavégzés van, így ezt felhasználhatjuk arra, hogy a hengerben levő gázt kiindulási állapotba hozzuk. Véges dugattyú-sebesség esetén expanzió során a dugattyúval érintkező gázrteg nyomása kisebb, mint a hengerben uralkodó közepes nyomás, kompresszió során pe-

dig nagyobb annál. (A nyomáseloszlás a hengerben az ábra szerinti.) Mivel a munka közvetlenül a dugattyúra ható nyomástól függ, nyilvánvaló, hogy az expanzió során végzett munka kisebb lesz, mint a kompresszió folyamán felvett munka. Ez azt jelenti, hogy a gázt egyedül az expanzió során végzett munkával nem tudjuk eredeti állapotába juttatni, tehát a folyamat irreverzibilis. (Hasonló problémát tárgyaltunk a kvázistatikus folyamatok vizsgálatánál is.) Az irreverzibilitás oka a véges dugattyúsebesség.

e) A gyakorlatban sűrűn előforduló irreverzibilis folyamat a véges hőmérséklet-különbség mellett létrejövő hőáramlás. A tapasztalat szerint a hő önmagától a nagyobb hőmérsékletű (melegebb) testtől áramlik a kisebb hőmérsékletű (hidegebb) test felé. A hőáramlás addig tart, míg termikus egyensúly nem jön létre a két test között. A termikus egyensúly beállta után bármennyig hagyjuk egymás mellett a két testet, a környezet által végzett munka nélkül a folyamat ellenkező irányba nem indul meg. Az eredeti állapotot csak úgy állíthatjuk vissza, ha az eredetileg hidegebb testből hőt vonunk el, míg a másikat felmelegítjük. Ezzel azonban a környezetben olyan változásokat idézünk elő, melyek önmaguktól nem szűnnek meg. Az irreverzibilitás oka ennél a folyamatnál a két test közötti véges hőmérsékletkülönbség.

A példaként megvizsgált folyamatok természetesen nem foglalják magukba az összes irreverzibilis folyamatot, de betekintést adnak az irreverzibilis folyamatok természetébe és rajtuk keresztül megismerhetünk néhány, a műszaki hőtanban fontos irreverzibilitást előidéző okot. Ilyenek a súrlódás, a véges folyamatsebesség és a véges hőmérsékletkülönbség.

Általánosságban leszögezhetjük, hogy egy folyamat akkor reverzibilis, ha egyensúlyi (kvázistatikus) lefolyású és súrlódásmentes. A fentiek alapján választ is adhatunk arra a kérdésre, hogy van-e a folyamatok lefolyásának kitüntetett iránya. A reverzibilis folyamatok bármely irányba lejátszódhatnak, ezzel szemben az irreverzibilis folyamatok önmaguktól csak meghatározott irányba.

Ha irreverzibilis folyamatot meg akarunk fordítani, s a rendszert kiindulási állapotába kívánjuk juttatni, ezt csak úgy tehetjük meg, ha a rendszer környezetében munka, illetve hőráfordítással kompenzálódunk.

folyamat játszódik le. Ezáltal az utóbbiban olyan változásokat idézünk elő, amelyek önmaguktól nem szűnnek meg.

Csak a reverzibilis folyamatok ábrázolhatók diagramokban az állapotjelzők függvényében, mivel ez esetben a diagram minden pontja a rendszer egy-egy egyensúlyi állapotát tükrözi. Az irreverzibilis folyamatok ábrázolása vagy egyáltalán nem, vagy csak közelítőleg lehetséges (pl. minden paramétert a térfogatra vonatkoztatott középértékével helyettesítünk), ill. az ilyen folyamatokból levonható következtetések csak korlátozottan érvényesek. A reverzibilis folyamatok teljes termodinamikai és matematikai analízis alá vehetők, ha ismertek a rendszer jellemzői.

A tapasztalat szerint a természetben lezajló folyamatok mind irreverzibilisek, ugyanakkor sok, a gyakorlatban előforduló folyamat viszonylag kevésbé tér el a megfordíthatóktól. A gyakorlati számítások során a reverzibilis folyamatokra nyert eredményekről az irreverzibilitást figyelembe vevő tapasztalati tényezők segítségével lehet áttérni a valóságos folyamatokra.

Megjegyezzük, hogy az irreverzibilitás mértéke folyamatonként lehet más és más. Például a súrlódás legyőzésére fordított munka kisebb lesz, ha polírozott felületen mozgatunk egy polírozott testet, mint ha az érintkező felületek durva megmunkálásúak. Ez utóbbi esetben a súrlódás során keletkező és a környezetbe távozó hő is több lesz, mint az előzőben. A folyamatok irreverzibilitásának jellemzésére az entrópiát alkalmazzuk.

### 11.3. A hő folyamatos (ciklikus) munkává alakításának feltétele

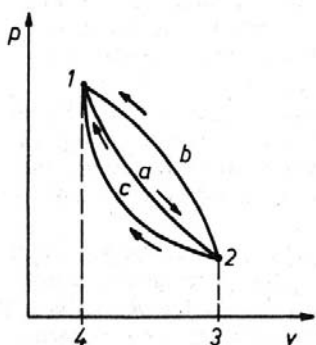
Az eddigiek során láttuk, hogy mechanikai munka szolgáltatásához a munkaközegnek expandálnia kell. Expanziókor a munkaközeg a környezeti nyomás ellenében a közölt hő, vagy belső energiája rovására

$$W_{1,2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV \text{ munkát végez.}$$

Egyszeres expanzió során csak meghatározott mennyiségű munka nyerhető. Olyan gép vagy gépcsoport, amelyben csupán az expanzió játszódik le, ugyanakkor azonban folyamatosan szolgáltat munkát, a gyakorlatban csak

kivételes esetben fordul elő (a föld mélyéből feltörő, a környezetinél nagyobb nyomású gázt, vagy gőzt a környezeti nyomásig adiabatikusan expandáltathatjuk).

Általános eset az, hogy a munkaközeget a gépen belül kell olyan állapotba hozni, hogy expanszióképes legyen. Ez azt jelenti, hogy az 1-a-2 expanszió folyamat után (11.5 ábra) a (2) állapotú közeget valamilyen folyamat, vagy folyamatok segítségével vissza kell juttatni kezdeti (1) állapotába. Az 1-a-2 folyamat expansziómunkája az 1-a-2-3-4-1 területtel jellemezhető.



**11.5. ábra - Visszajuttatás a kezdeti állapotba**

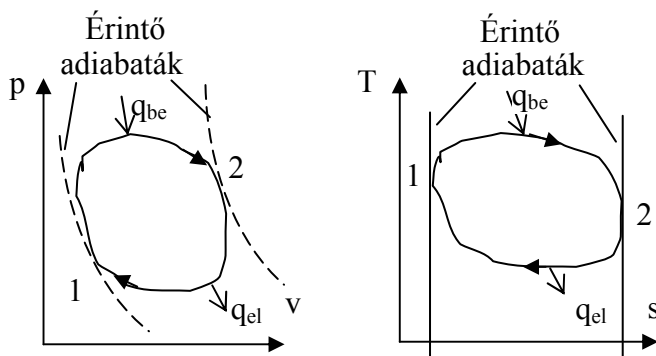
A munkaközeg kezdeti (1) állapotába három úton juthat el:

1. A 2-a-1 görbe egybeesik az 1-a-2 görbével. Ez esetben az expanszió során kapott  $w_{1a2}$  expanszió munka megegyezik a 2-a-1 folyamat során befektetendő  $w_{2a1}$  munkával. A két folyamat eredményeképpen a környezeten munkavégzés nem történik.

2. A 2-b-1 kompresszió-folyamat görbéje az 1-a-2 expanszió görbe felett halad. Ekkor a 2-b-1 folyamat során több munkát kell befektetnünk (1-4-3-2-b-1 terület) mint amennyit az 1-a-2 expanszió folyamat során nyerünk (1-a-2-3-4-1 terület).

3. A 2-c-1 kompresszió folyamat görbéje az 1-a-2 expanszió görbe alatt halad. Ez esetben az expansziómunka (1-a-2-3-4-1 terület) nagyobb, mint a 2-c-1 folyamat munkaszüksége (1-4-3-2-c-1) terület. A két folyamat eredményeképpen a rendszer munkát szolgáltat a környezetének, amelyet

1. A 2-c-1 kompresszió folyamat görbéje az 1-a-2 expanszió görbe alatt halad. Ez esetben az expansziómunka (1-a-2-3-4-1 terület) nagyobb, mint a 2-c-1 folyamat munkaszüksége (1-4-3-2-c-1) terület. A két folyamat eredményeképpen a rendszer munkát szolgáltat a környezetének, amelyet



**11.6. ábra Munkát szolgáltató körfolyamat**



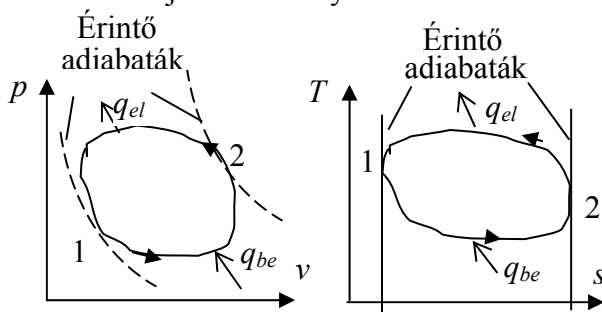
az 1-a-2-c-1 területtel ábrázolhatunk.

Az olyan termodinamikai folyamatokat, melyek eredményeképpen a munkaközeg különböző állapotokon keresztül visszajut kiindulási állapotába, körfolyamatoknak, vagy ciklusoknak nevezzük.

Ha a körfolyamat körbejárása az óramutató járásával megegyezik (3. eset: 1-a-2-c-1) a rendszer környezetének munkát szolgáltat. A körfolyamatot többször megismételve a bevezetett hőből tetszés szerinti mennyiségű munkát nyerhetünk. A 11.6. ábrán  $p - v$  és  $T - s$  diagramban ilyen körfolyamatot ábrázoltunk. A körfolyamat és az érintő adiabaták érintési pontjai lehatárolják a hőbevezetés és hőelvonási folyamatokat. A körfolyamat reverzibilis, így a diagramokban a körfolyamatok által bezárt területek a körfolyamatok hasznos munkáját jelölik. Az óramutató járásával megegyező körbejárású körfolyamatok hőerőgépekben kerülnek megvalósításra.

A  $T - s$  diagramból jól látható, hogy a körfolyamatba bevezetett hő sohasem alakítható át teljes egészében munkává, mivel a 2 állapotból a munkaközéget csak entrópiacsökkenéses – vagyis hőelvonásos folyamattal juttathatjuk vissza az 1. állapotba.

Ellenkező körbejárási irány (11.6. ábra 2. eset: 1-a-2-b-1) esetén a rendszeren munkát kell végezni és megfordított körfolyamatról beszélünk. Ilyen körfolyamatot szemléltet a 11.7. ábra. Az óramutató járásával ellentétes körbejárású körfolyamatok a hűtőkörfolyamatok.



**11.7. ábra - Hűtőkörfolyamat  $p - v$  és  $T - s$  diagramban**

Ha a körfolyamat minden elemében megfordítható, akkor reverzibilis körfolyamatokról beszélünk. Ilyen körfolyamatokban a munkaközeg kémiai elváltozást nem szenvedhet. Ha a körfolyamat csak egy elemében is irreverzibilis, akkor a körfolyamat irreverzibilis.

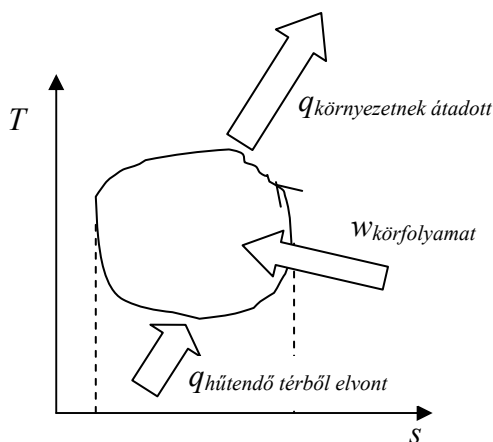
Az ideális (reverzibilis) körfolyamatok vizsgálata során nyert eredmények a valóságos gépek irreverzibilis körfolyamataira tapasztalati korrekciós tényezők segítségével alkalmazhatók.

#### 11.4. A körfolyamatok gazdaságosságának megítélése

Mint az előzőekben láttuk a körfolyamatokban csak a bevezetett hő egy része alakul mechanikai munkává. A körfolyamatok gazdaságosságának megítélésére az egy körfolyamat során kapott munka ( $w_{\text{körf}}$ ) és a bevezetett hő ( $q_l$ ,  $q_{be}$ ) hányadosát használják. Ezt a viszonyszámot, mivel értéke csupán a körfolyamat termodinamikai felépítésétől és határaitól függ, a gépek tökéletlenségét nem veszi figyelembe, termikus hatásfoknak ( $\eta$ ) nevezzük. Tehát

$$\eta_t = \frac{w_{\text{körf}}}{q_{be}} = \frac{q_{be} - |q_{el}|}{q_{be}} = 1 - \frac{|q_{el}|}{q_{be}}. \quad (11.1)$$

A termikus hatásfok ezen kifejezése általános érvényűek, mind reverzibilis, mind irreverzibilis körfolyamatokra. Az irreverzibilis körfolyamatok termikus hatásfoka a vissza nem térülő veszteségek miatt mindig kisebb, mint a reverzibilis körfolyamatoké.



11.8. ábra - Hűtőkörfolyamat

A körfolyamat munkája nem csak a hőmennyiségek segítségével számítható, hanem meghatározható, mint a körfolyamatot alkotó folyamatok technikai vagy térfogatváltozási munkáinak előjel helyes összege. A körfolyamat munkája (hasznos munka) előjelszabályunk miatt a fenti munkák összegének abszolút értéke.

A fordított (óramutató járásával ellentétes körbejárási irányú) vagy hűtőkörfolyamatokat a hő hidegebb helyről melegebbre

történő szállítására alkalmazzák (11.8. ábra).

Az ilyen körfolyamatok gazdaságosságát a hűtendő közegtől elvont (a munkaközegbe bevezetett) hő és az erre fordított munka hányadosával jellemezzük.

Ezt a viszonyszámot hűtési teljesítménytényezőnek (vagy fajlagos hűtőteljesítménynek) ( $\varepsilon$ ) nevezzük.

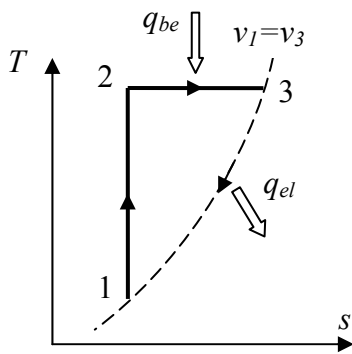
$$\varepsilon = \frac{q_{\text{hűtendő tétel, elvont}}}{|W_{\text{körf.}}|}. \quad (11.2)$$

(A hűtendő tételből elvont hőmennyiség – a körfolyamatba bevezetésre kerül.)

### Példa:

Számítsuk ki az adiabatikus kompresszióból, izotermikus expanzióból és izochor állapotváltozásokból álló megfordítható körfolyamat termikus hatásfokát. O<sub>2</sub> a munkaközeg és az adiabatikus kompressziónál  $v_1/v_2=3,5$ .  $R_M=8314 \text{ J/(kmol K)}$ ,  $M_{O_2}=32$ .

### Megoldás:



A termikus hatásfok

$$\eta_t = 1 - \frac{|q_{el}|}{q_{be}}$$

A bevezetett hőmennyiség

$$q_{be} = RT_2 \ln \frac{v_3}{v_2} = RT_3 \ln \frac{v_1}{v_2}$$

Az elvont hő

$$|q_{el}| = c_v(T_3 - T_1) = c_v T_3 \left( 1 - \frac{T_1}{T_3} \right)$$

A megfelelő mennyiségek behelyettesítése

$$\eta_t = 1 - \frac{c_v T_3 \left( 1 - \frac{T_1}{T_3} \right)}{RT_3 \ln \frac{v_1}{v_2}} = 1 - \frac{1 - \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{\kappa-1}}{(\kappa-1) \ln \frac{v_1}{v_2}} = 1 - \frac{1 - \left( \frac{1}{3,5} \right)^{1,4-1}}{(1,4-1) \ln 3,5} = 0,213.$$

## 11.5. A termodinamika második főtételének megfogalmazásai

A termodinamika második főtétele a tapasztalat alapján került megfogalmazásra. Sokféle megfogalmazása van, ezek közül a legelterjedtebbeket adjuk meg.

1824-ben *Carnot* közel járt a termodinamika második főtételének felfedezéséhez, de ebben megakadályozta őt, hogy akkor még az első főtétel sem volt ismeretes. E nélkül pedig a második főtételt nem lehetett világosan felismerni.

A második főtétel legáltalánosabb megfogalmazása így hangzik:  
Bármely, önmagától lejátszódó valóságos folyamat irreverzibilis.  
A többi megfogalmazás ennek a legáltalánosabb megfogalmazásnak a speciális alkalmazása.

*Clausius* 1850-ben a következő megfogalmazást javasolta:  
Hő önmagától hidegebb helyről melegebb helyre nem képes áramlani.

*Thompson* (Lord Kelvin) (1851) szerint:  
Lehetetlen valamilyen közegből nem élő anyagi közvetítő segítségével munkát nyerni, ha hőmérséklete alacsonyabb, mint a környező tárgyak közül a lehidegebbé.

*Planck* szerint:  
Lehetetlen olyan periodikusan működő gépet szerkeszteni, amely csupán egyetlen hőforrás lehűlése során végez munkát (az ilyen gép termikus hatásfoka 100 % lenne).

Ha ilyen gép megvalósítható lenne, akkor az pl. csupán az óceánok vizének lehűtésével szolgáltatna munkát. Ez a folyamat addig tartana, amíg az óceánok vizének összes belső energiája mechanikai munkává alakulna. Az ilyen gépet *Ostwald* másodfajú örökmozgónak nevezte. Így a Planck-féle megfogalmazás a következőképpen módosítható:

A másodfajú örökmozgó (perpetuum mobile) nem létezik.  
(Az elsőfajú örökmozgó az energiamegmaradás törvényével áll ellentétben. A másodfajú örökmozgó az első főtételnek nem mond ellent, ugyanis a munkát nem semmiből, hanem a hőforrás belső energiájából szolgáltatná.)

A Planck-féle megfogalmazás nem mond ellent az előzőeknek, ugyanis, ha ilyen gép létezne, akkor egy hőforrás lehűtésével nyert munkát pl. sűr-

lódással hővé alakítva átadhatnánk egy alacsonyabb hőmérsékletű testnek. Egy idő múlva az utóbbi hőmérséklete nagyobb lenne, mint a hőforrásé, azaz hőt szállítanánk hidegebb helyről melegebbre, külső munka befektetése nélkül.

Alá kell húzni a termikus folyamatok fontos sajátosságát: a mechanikai munkát, az elektromos munkát, a mágneses erők munkáját stb. maradék nélkül teljesen hővé lehet alakítani, ami viszont a hőt illeti, periodikusan ismétlődő folyamatokban csak egy része alakítható át mechanikai vagy más munkává, a másik része elkerülhetetlenül a hűtőközegbe megy át.

## Irodalomjegyzék

- [1] Cumpsty, N.A.: Jet Propulsion, *Cambridge University Press, 1997*
- [2] Eastop, T.D., and McConkey, A.: Applied Thermodynamics. *Longman, 1988*
- [3] Ekkert, E.R.. – Drejk, R.M.: Teorija teplo- i masszoobmena, *Goszenergoizdat, Moszkva, 1961.*
- [4] Faltin: Műszaki hőtan, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970
- [5] Feynman, R.P., – Leighton, R.,B., - Sands, M.: Mai fizika 4., *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969*
- [6] Fényes I.: Entrópia, Gondolat Kiadó, Budapest, 1962
- [7] Grabovszkij, R.I.: Kursz fiziki, *Izd. Vűszsaja skola, Moszkva, 1970*
- [8] Gyarmati J.: Nemegyensúlyi termodinamika, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967*
- [9] Harmatha A.: Termodinamika műszakiaknak, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982*
- [10] Isachenko V. – Osipova, V. – Sukomel, A.: Heat Transfer, *Mir Publishers, Moscow, 1974*
- [11] Jakovlev, V.F.: Kursz fiziki, *Izd. Proszvescsenie, Moszkva, 1976*
- [12] James, B., - Hawkins, G.,A.: Engineering Thermodynamics, *John Willey and Sons, 1960*
- [13] Jászai T.: Műszaki hőtan (Hőközlés-Termodinamika), *Tankönyvkiadó, Budapest, 1968*
- [14] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan I, (J7-724) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1976*
- [15] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan I/2, (J7-724/a) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1976*
- [16] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan II, (J7-725) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1976*
- [17] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan példatár, (J7-1014) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1981*
- [18] Kubo R.: Termodinamika, *Izd. Mir, Moszkva 1970*
- [19] Kutateladze, Sz.Sz.: Osznovü teorii teploobmena, *Izd. Nauka, Novoszibirszk, 1970*
- [20] Krutov, V.I.: Tehnicseszakaja termodinamika, Moszkva, 1971
- [21] Lakosi J.: Műszaki hőtan, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1968*
- [22] Larikov, N.N.: Obscsaja teplotehnika, *Izd. Sztoitelsztva, Moszkva, 1966*
- F23] Mihejev, M.A.: A hőátadás gyakorlati számításának alapjai, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1963*

- [24] Nascsokin, B.B.: Thnicseszkaja termodinamika, *Izd. Vüszsaja skola, Moszkva, 1975*
- [25] Oates, G.C.: Aerothermodynamycs of Gas Turbine and Rocket Propulsion, *AIAA Education Series 1988*
- [26] Pásztor, E. – Szoboszlai, K.: Kalorikus gépek üzeme, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967*
- [27] Rogers, G.F.C., Mayhew, Y.R.: Engineering Thermodynamics, *Longman, New York, 1980.*
- [28] Sánta, I.: Hőtan példatár kiegészítés BMGE Repülőgépek és Hajók Tanszék kiadványa, Budapest, 2009
- [29] Simonyi, K.: Kinetikus gázelmélet, Klasszikus statisztika, *Egyetemi Nyomda, Szakmérnöki jegyzet, 1948*
- [30] Shvets, I.T. at all.: Heat Engineering, *Mir Publishers, Moscow, 1975*
- [31] Szivuhin, D.V.: Obscsij kursz fiziki II., *Izd. Nauka, Moszkva, 1975*
- [32] The Jet Engine, *Rolls-Royce plc. 1986.*
- [33] Wong, H.Y.: Hőátadási zsebkönyv, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983*

# Ábrajegyzék

1.1. ábra A rendszer és környezete	1
1.2. ábra Zárt rendszer	2
1.3. ábra Nyitott rendszer	2
1.4. ábra Hőmennyiség és a munka előjele	4
1.5. ábra Vonalintegrál két görbe mentén	5
2.1. ábra A folyadékban szuszpendált részecske mozgása	7
2.2. ábra A golyó becsapódásának hatása a céltáblára	9
2.3. ábra Az ideális gáz nyomásának meghatározásához kiválasztott rendszer	10
2.4. ábra Az $i$ -edik molekula mozgása két ütközés között	11
2.5. ábra U-csöves manométer	13
2.6. ábra Nyomások értelmezése	14
2.7. ábra A hőmérséklet levezetéséhez választott rendszer	15
2.8. ábra Hőmérsékleti skálák	18
2.9. ábra A vizsgált két rendszer	20
3.1. ábra. Az állapotfelület	25
4.1. ábra Molekulák ütközése	28
4.2. ábra A molekulák közötti erők	29
4.3. ábra A molekulák közötti erők és energiák	29
4.4. ábra Potenciális energiák változása a molekulák közötti távolság függvényében	31
4.5. ábra Kompresszibilitási tényező változása a nyomás függvényében	31
4.6. ábra Megállított és mozgó molekulák	33
4.7. ábra Erőhatások a molekulák között	34
4.8. ábra Gömbhéj a gázban molekula körül	36
4.9. ábra Van der Waals-izotermák	38
5.1 ábra A szilárd test szabadságfokai	40
5.2. ábra A két- (a) és háromatomos (b) molekula modellje	41
6.1. ábra A valódi fajhő hőmérsékletfüggése	46
6.2. ábra Egységnyi tömegű rendszer izochor hevítése	48
6.3. ábra Nitrogén $c_v$ fajhőjének változása a hőmérséklet függvényében	50
6.4. ábra A $c_v$ változása a kinetikus fajhőelmélet alapján	52
6.5. ábra Az $\varepsilon$ közepes energia változása	53
7.1. ábra A henger, dugattyú és hengerfej által határolt zárt rendszer	57



7.2. ábra Térfogatváltozási munka a p-v diagramban	58
7.3. ábra Elemi folyamat a zárt rendszer körfolyamatában	58
7.4. ábra Nyitott rendszer kölcsönhatásokkal	60
7.5. ábra Betolási munka	60
7.6. ábra Elemi folyamat a nyitott rendszer körfolyamatában	62
7.7. ábra A p-v és T-s diagram	72
8.1. ábra Hőközlési folyamat a keverékkel	79
8.2. ábra Gázkeverék komponensek keveredés előtt	81
8.3. ábra Gázkeverék komponensek keveredése nyitott rendszerben	82
9.1. ábra Izochoor folyamat	88
9.2. ábra $v=\text{állandó}$ görbék	89
9.3. ábra Izobár folyamat	90
9.4. ábra $p=\text{állandó}$ görbék	91
9.5. ábra Izotermikus folyamat	92
9.6. ábra Izotermikus folyamat hőmennyisége	93
9.7. ábra Adiabatikus folyamat	94
9.8. ábra Izentrópikus kompresszió	96
9.9. ábra A politrópikus fajhő változása	99
9.10. ábra Viszonyító görbék a p-v diagramban	105
9.11. ábra Viszonyító görbék a T-s diagramban	105
9.12. ábra Előjelek p-v diagramban	106
9.13. ábra Előjelek T-s diagramban	106
9.14. ábra A belsőenergia-változás szerkesztése	107
9.15. ábra Az entalpia-változás szerkesztése	107
9.16. ábra A ( $0 < n < 1$ ) politrópikus expanzió folyamat térfogat- változási munkaterületének szerkesztése	108
9.17. ábra Az ( $1 < n < \kappa$ ) politrópikus expanzió folyamat technikai munkaterületének szerkesztése	109
9.18. ábra A politrópikus fajhő előjele	110
10.1. ábra U-alakú cső egyik ágában fűtéssel	111
10.2. ábra Rugó ellenében táguló gáz	113
10.3. ábra Beáramlás tartályba	115
10.4. ábra. A Jendrassik-indítás során a hengerben lejátszódó folyamat	117
10.5. ábra Fűtött tartály izotermikus kiáramlással	119
10.6. ábra Fűtött tartály izobár kiáramlással	120
10.7. ábra Tartály politrópikus kiáramlással	122
10.8. ábra Ugrásszerű nyomásnövelés	124
10.9. ábra Gázoszlop dugattyúval	126
11.1. ábra Folyamat p-v diagramban	130

11.2. ábra	Állapotjelzők változása fojtáskor	131
11.3. ábra	Szabad expanzió	133
11.4. ábra	Véges dugattyúsebesség hatása	133
11.5. ábra	Visszajuttatás a kezdei állapotba	136
11.6. ábra	Munkát szolgáltató körfolyamat	136
11.7. ábra	Hűtőkörfolyamat p-v és T-s diagramban	137
11.8. ábra	Hűtőkörfolyamat	138