

*AMGD*

*Dr. Gausz Tamás*

# ÁRAMLÁSTAN

**Budapest, 2012**

7DE.7.1.



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2



# TARTALOMJEGYZÉK

1.	A folyadékok és gázok fizikai jellemzői.....	1
2.	Matematikai segédeszközök.....	7
	2.1. Görbevonaltú koordináta rendszerek.....	9
	2.2. A teljes, totális, szubsztanciális vagy materiális derivált....	11
3.	A térerősség és a potenciális erőterekben értelmezhető potenciál.....	14
4.	A derivált tenzor.....	18
5.	Kinematika.....	23
6.	A mérleg-egyenlet.....	28
7.	A fizika megmaradási elvei – az áramlástanban.....	33
	7.1. Az áramlástan feladatok – modern – matematikai modellje.....	40
8.	Hidrostatika.....	45
9.	Komplex potenciálok.....	49
10.	Örvényes áramlások.....	54
11.	Az impulzus tétel alkalmazása.....	59
	11.1. Szélcsatorna modell vizsgálata.....	61
	11.2. A Borda féle (éles szélú) kifolyónyílás.....	66
	11.3. Hűtőtoronybeli áramlás vizsgálata.....	68
12.	A Bernoulli egyenlet alkalmazása.....	73
13.	Légcsavar, hajócsavar és szélkerék.....	77
14.	Összenyomható közegek áramlása.....	84
	14.1. Laval cső.....	87
	14.2. A Bernoulli egyenlet és az összenyomhatóság.....	90
	14.3. Testek körül kialakuló szuperszónikus áramlás.....	92
	14.4. Merőleges lökéshullám.....	95
	14.5. Összenyomható folyadék áramlása rugalmas csővezetékben.....	97
15.	Súrlódásos áramlások.....	101
	15.1. A turbulencia, illetve turbulens áramlások.....	103
	15.2. A Navier-Stokes egyenlet.....	107
	15.3. A hasonlóság elmélet.....	112
16.	A határréteg elmélet elemei.....	116
	16.1. A határréteg egyenlet.....	117
	16.2. Sebesség-eloszlás a határrétegben.....	120
	16.3. A határrétegbeli áramlási formák változása.....	122
	16.4. Határréteg okozta másodlagos – szekunder – áramlás.....	124
17.	A kiterjesztett Bernoulli egyenlet.....	126
	17.1. Hosszú, egyenes cső nyomásvesztésének számítása.....	126
	17.2. A kontrakció és a mérőperem.....	133
	17.3. A Borda-Carnot veszteség.....	135
	17.4. Szelepek, tolózárok, csappantyúk nyomásvesztése.....	137
	17.5. Nyomásvesztés csőkönyökökben és ívdarabokban.....	138
	17.6. A diffúzor hatásfoka.....	140
	17.7. Összenyomható közeg kisebbességű áramlása csőben.....	140
	17.8. Összenyomható közeg nagyobbességű áramlása csőben.....	143

18.	Testek körüli áramlások.....	152
	18.1. Tompa testek.....	152
	18.2. Áramvonalas testek – szárnyprofil.....	155
	18.3. Járművekre ható közegerők.....	159
19.	Áramlástanai gépek – bevezető.....	163
	19.1. A csővezetékek jelleggörbéje.....	163
	19.2. Szárnyrácsra ható erő.....	164
	19.3. Áramlástanai gépek.....	167
	19.4. Radiális átömlésű járókerékkel ellátott örvénygépek jelleggörbéje.....	172

## Előszó

Az itt következő tananyag a BME Közlekedésmérnöki Kar alapképzésben részt vevő hallgatói számára készült – azokat a tananyag részeket tartalmazza, amelyek a közlekedésben dolgozó mérnökök számára mintegy alpműveltségként elvárható ismeretet jelentenek, illetve amely anyag lehetővé teszi, hogy a megfelelő szakirányban továbbtanuló hallgatók legalább részben ezekre az alapokra építhessék a szakirányú tanulmányaikat. Az elméleti anyagrészeket mintafeladatokkal egészítettük ki – ezek tanulmányozása elősegíti az elméleti ismeretek jobb megértését és a tényleges feladat megoldást.

**Fontos:** a kötelező anyag fekete színnel íródott, az ezt az anyagot kiegészítő példák színe bordó. Ezen példák anyaga szintén a megtanulandó részhez tartozik. Olvasható e jegyzetben néhány kitekintő (tehát, nem kötelező) anyagrész is – ezeket kék színnel írtuk. Vigyázat: a kék részek valahol elkezdődnek, de valahol be is fejeződnek, és ez nem mindig a fejezet vége!

Itt fejezem ki köszönetemet **Dr. Perjési István** egyetemi adjunktusnak, aki a kéziratot gondosan átnézte és tanácsaival jobbá tenni segítette.

Az itt következő tananyag **előadás vázlat**nak készült és ennek megfelelően kell használni is. A tananyagot elsajátítani **önmagában**, csak ebből az előadás-vázlatból nem célszerű. Ennek az előadás-vázlatnak az a célja, hogy a tananyag minimumát rögzítse, és a tanulást elősegítse. Természetesen nem pótolja az előadások meghallgatását, de elősegíti az önálló tanulást.

A tanulás általában munka is – az eredményes munka pedig sikerélményt ad. Az anyag elsajátítása csak komoly munkával lehetséges. Segítségként irodalom-jegyzéket adtunk meg: az ott felsorolt jegyzetek és könyvek segíthetnek a tananyag jelen előadás vázlatban csak röviden bemutatott részeinek alaposabb megértésében.

Rá kell mutatni arra is, hogy ez az előadás vázlat az „Áramlástan” tárgy igencsak minimális részét tartalmazza – azt a részt, amit a sajnálatos módon rövidre szabott előadás keret megenged. Az igényes Olvasó nem elégedhet meg e munka tanulmányozásával, különösen akkor nem, ha tekintetbe vesszük, hogy erről a tématerületről régebbi és modern, magyar nyelvű, igen jól megírt szakirodalom áll rendelkezésre.

Jelen előadás vázlatban néhány mintapélda is található – ezeknek a megoldása is olvasható, tanulmányozható. A feladatmegoldás, különösen az önálló feladatmegoldás a tananyag elsajátításának egyik, lehetséges önellenőrzési módja is. A példák tekintetében a legfontosabb, ezt az előadás vázlatot kiegészítő munka a [7] példatár – használatát hangsúlyozottan javasoljuk, az előadás vázlat szövegében pedig több helyen utalunk e példatár vonatkozó fejezeteire.

A hallgatók hosszú távú és alapvető érdeke az, hogy a szakterületüket alkotó tudományokból alapos ismereteket szerezzenek, akkor is, ha napjainkban ezzel ellentétes tendenciák érvényesülésének lehetünk tanúi.

*Gróf Széchenyi István: „Egy nemzet ereje a kiművelt emberfők sokaságában rejlik.”*

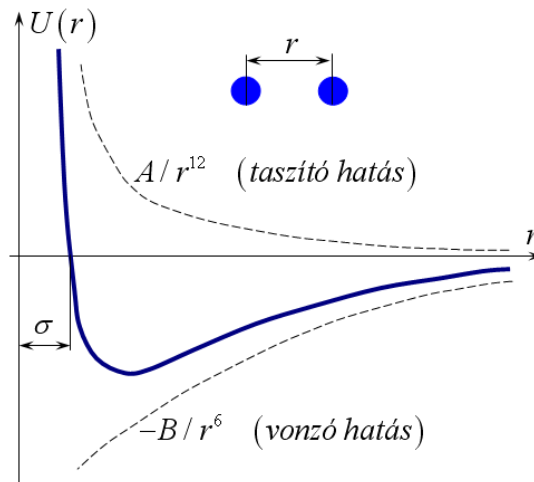
(Az esetleges megjegyzéseket a: [gausz.tamas@gmail.hu](mailto:gausz.tamas@gmail.hu) címre kérem – minden javító szándékú megjegyzésért ez úton is, hálás köszönetemet fejezem ki.)

# 1. A folyadékok és gázok fizikai jellemzői

A folyadékok és gázok – a későbbiekben ezeket általában *közeg*nek nevezzük – részecskékből állnak. A részecske-szemlélet alapján vezethetjük be, illetve értelmezhetjük a számunkra legfontosabb fizikai tulajdonságokat. A jegyzet első részében – hőtani szempontok szerint – már volt szó a részecskék tulajdonságairól, illetve az ezek alapján értelmezett jellemző mennyiségekről. Ebben, a második részben néhány ide vonatkozó fogalmat az áramlástan szempontjából is bevezetünk.

Ebben az előadás vázlatban úgy tekintjük, hogy a folyadékok és gázok részecskéinek tömege és sebessége van, illetve ebből következően minden részecskének van mozgásmennyisége (más szóval lendülete, vagy eleven ereje; ez a tömeg és a sebesség szorzata) és mozgási energiája.

Létezik továbbá a részecskék között egy, párpotenciállal jellemzett kapcsolat is, amelyet a 1.1 ábrán vázoltunk (a párpotenciál szigorúan véve két részecske között értelmezhető, de a hatás nagyon sok részecske esetében is hasonló).



1.1. ábra – Lennard-Jones féle, 6-12-es párpotenciál

Az 1.1. ábrán – példaként – a Lennard-Jones féle, 6-12-es párpotenciál (vastag, folytonos vonal), illetve ennek két összetevője látható. A felső, szaggatott vonal a Pauli féle, az elektronfelhők kölcsönhatásából adódó taszító hatást (erőt) mutatja. Az alsó, szintén szaggatott vonal pedig a van der Waals féle, dipólusok kölcsönhatásán alapuló vonzó hatást (erőt) tünteti fel. Az eredő a két rész összege.

A taszító hatás kis távolságokon (kb. tized-nanométeren belül) érvényesül; a vonzó hatás, a *kohézió* az ettől sokkal nagyobb távolságokra jellemző.

A folyékony folyadék részecskéi egymáshoz olyan közel helyezkednek el (a „ $\sigma$ ” távolságnál nem sokkal nagyobb távolságra), hogy közöttük lényeges vonzó hatás jut érvényre – ezt kohézióknak is nevezzük. Erre a tényre a későbbiekben, a viszkozitás vizsgálatokkor visszatérünk.

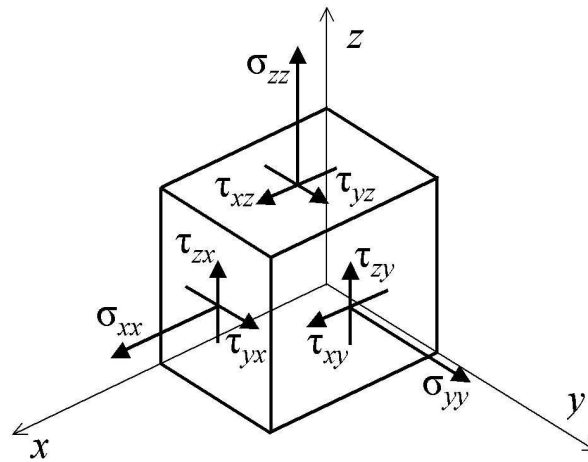
A gáznemű közegek részecskéi között lévő átlagos távolság sokkal nagyobb, mint a folyadékok részecskéi közötti távolság. Ezért a gázok részecskéi közötti vonzóerő is sokkal kisebb, ezt a hatást a továbbiakban elhanyagolhatóan kicsinek tekintjük.

Az eddig tekintett tulajdonságok a közegekre, mint részecskéből álló halmazra jellemzőek. A következőkben a legfontosabb fizikai tulajdonságokat definiáljuk, a részecske szemlélet alapján. Tekintsünk egy egyszerűen összefüggő, zárt térfogatot. Nyilvánvalóan az ebben a térfogatban helyet foglaló részecskék összes tömege lesz a közeg **tömege**. A **sűrűség** pedig a tömeg és a térfogat hányadosa (az áramlástanban általában a sűrűséget használjuk, a fajtérfogat, a sűrűség reciproka ritkán fordul elő):

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad (1.1)$$

A tömeg példa az **extenzív** mennyiségekre, ezek értéke a vizsgált rendszer méretével arányosan változik. A sűrűség pedig a tömeghez kapcsolt **intenzív** mennyiség, ennek értéke nem függ a tekintett rendszer méretétől.

A folyadékokban és gázokban is értelmezünk feszültségeket (mérték-egységük alapesetben  $[\text{N}/\text{m}^2]$  vagy másképpen  $[\text{Pa}]$  – Blaise Pascalról elnevezve;  $1 [\text{N}/\text{m}^2] = 1 [\text{Pa}]$ ). Ezeket a feszültségeket a feszültség-tenzorban foglaljuk össze.



1.2. ábra – A feszültség-tenzor elemei

A feszültségek indexelése a következő elv szerint történik:

- ▶ az első index megmutatja, hogy a feszültség összetevő mely koordináta tengely irányába mutat;
- ▶ a második index megmutatja, hogy a feszültség összetevő mely koordináta tengelyre merőleges síkban fekszik.

A feszültség-tenzor részletesen kiírva az alábbi formát ölti:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Segítségével a felületi erő a következő módon határozható meg:

$$\mathbf{dF} = \mathbf{\Pi} \mathbf{dA} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} dA_x + \tau_{xy} dA_y + \tau_{xz} dA_z \\ \tau_{yx} dA_x + \sigma_{yy} dA_y + \tau_{yz} dA_z \\ \tau_{zx} dA_x + \tau_{zy} dA_y + \sigma_{zz} dA_z \end{bmatrix}; \quad (1.3)$$

Csak megjegyezzük, hogy [4]-ben (125. oldal) vagy [8]-ban (337. oldal) a feszültség-tenzor elemeinek index-sorrendje éppen ellenkezője a fentiekben alkalmazottnak, azonban az értelmezés is fordított – vagyis a felírás ezekkel a művekkel (is) azonos. Amiért ezt a formát választottuk annak oka az, hogy az általános mechanikában és a nemzetközi szakirodalomban is az általunk használt jelölésmód az elterjedtebb.

A feszültség-tenzor főátlójában a statikus nyomás és adott esetben a turbulens nyomás-többség található. A **statikus nyomás** a közeg részecskéinek rendezetlen hőmozgásából ered. A részecskék mozgás-mennyisége ütközésekkor megváltozik – e mozgásmennyiség-változás időegységre és felületegységre vonatkoztatott értékét nevezzük statikus nyomásnak. Mivel a rendezetlen hőmozgásnak nincs kitüntetett iránya, ezért a statikus nyomásnak sincs kitüntetett iránya – tehát skalár mennyiség.

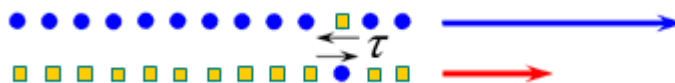
Csak megjegyezzük, hogy a skalár mennyiség másik oldalról nézve nulla-indexes tenzornak tekinthető (a nulla indexes helyett a nulladrendű megnevezés is használatos). A vektorok egy-indexes (vagy elsőrendű) tenzorok és a fentiekben bemutatott feszültség-tenzor két-indexes (vagy másodrendű) tenzor. Ezt a gondolatsort folytathatjuk és definiálhatunk magasabb index-számú, azaz magasabb rendű tenzorokat is, például turbulens áramlások vizsgálatakor a turbulens mozgások következtében előálló feszültségek tenzora lehet ilyen, ebben a jegyzetben azonban legfeljebb másodrendű tenzor fordul elő.

A statikus nyomás legkisebb értéke nyilván a nulla, hiszen a nyomást az ütköző részecskék sebessége, tömege és száma határozza meg – és legfeljebb nem ütközik egyetlen részecske sem.

A **turbulens nyomás-többség** hasonló a statikus nyomáshoz, mivel az is egy rendezetlen, nulla várható értékű mozgásforma eredménye. A kétféle normál feszültség összetevő között a különbség abban rejlik, hogy a turbulens mozgás intenzívebb, esetleg sokkal intenzívebb, mint a rendezetlen hőmozgás, ezért a turbulens mozgásból származó feszültségek általában nagyobbak, mint a rendezetlen mozgásból eredő feszültségek.

Amennyiben a közegben egy szilárd felület van, akkor ez a felület a közeget lényegében két féltérre osztja. Ekkor azonban minden, a felülethez az egyik féltér valamely irányából érkező (ütköző) részecskéhez nagyon nagy valószínűséggel találhatunk egy „párt”, egy olyan részecskét, amelynek az ütközése az első részecske ütközésének tükörképe. Ennek alapján kijelenthető, hogy a szilárd felületen a statikus nyomás a felületre merőlegesen keletkezik. Ebből következik az is, hogy a statikus nyomás egy felületre merőleges (elegendően kis átmérőjű) furat segítségével mérhető – ebbe a furatba ugyanis csak a rendezetlen mozgás következtében kerülnek be a részecskék.

A feszültség-tenzor főátlón kívüli elemei a **csúsztató feszültségek**. A csúsztató feszültség keletkezésének fő oka – folyékony folyadék réteges áramlásának estében, amikor a részecskék elég közel vannak egymáshoz – a részecskék között keletkező kohéziós erő (1.1. ábra – „vonzó hatás”).



1.3. ábra – Különböző sebességű, egymás melletti rétegek

A gáznemű közegek réteges és gomolygó áramlásában egyaránt, valamint a folyékony folyadék gomolygó áramlásában a csúsztató feszültség keletkezésének fő oka a részecske cserével létrejövő mozgás-mennyiség csere (mozgásmennyiség transzport). A lassabb részecskék (1.3. ábra, alsó részecske sor) átlépve a gyorsabbak közé, azok mozgását fékezik, a gyorsabbak pedig (felső sor) a lassabbak közé kerülve, azok mozgását gyorsítani igyekeznek.

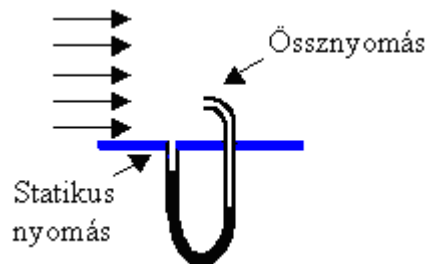


A részecske csere oka réteges áramlásban a hőmozgás, gomolygó (turbulens) áramlásban ehhez adódik még a turbulens sebesség-ingadozások miatti – esetenként sokkal intenzívebb – részecske csere. A csúsztató feszültség keletkezésének szükséges feltétele a sebesség különbség (1.3 ábra). Csak megjegyezzük, hogy a részecske csere nem csak mozgásmennyiség, hanem egyúttal anyag és energia transzportot is jelent.

A fentiekből következik, hogy folyékony folyadék esetében, a hőmérséklet növekedésével, amikor a részecskék a hőmozgás intenzitásának növekedése miatt egymástól távolabb kerülnek, a súrlódó feszültség csökken. Ugyanakkor, a gázok réteges (lamináris) áramlásának esetében, a hőmérséklet növekedésével nő a csúsztató feszültség. Az ebben a csúsztató feszültségben szereplő dinamikai viszkozitást anyagjellemzőnek tekintjük, ezt a csúsztató feszültséget a későbbiekben a deformáció-sebességekkel és a dinamikai viszkozitással határozzuk meg (pl. 15.3 sz. képlet). A későbbiekben a dinamikai viszkozitás mellett szó lesz a turbulens dinamikai viszkozitásról is, ez utóbbi viszkozitás a mozgásjellemzők függvénye.

A gomolygó áramlásokban a csúsztató feszültség keletkezése a turbulens sebesség-ingadozások következménye – vagyis ezek függvényében határozzuk majd meg. A turbulens csúsztató feszültség tehát a mozgásállapottól (is) függ.

A nyomással kapcsolatban szólni kell még a **dinamikus nyomás**ról, illetve az **össznyomás**ról is. A dinamikus nyomás a részecskék rendezett mozgásából származó, időegységre illetve felületegységre jutó mozgásmennyiség változás, ezért természetesen irányfüggő – mégis, a hagyományos tárgyalásmódnak megfelelően skalár mennyiségként számolunk vele. Az **intenzív** mennyiségek csoportjába tartozik. A dinamikus nyomás közvetlenül nem mérhető. Mérhető viszont a dinamikus és statikus nyomás összegeként előálló **össznyomás**.



1.4. ábra – Nyomásmérés

Az össznyomást mérni olyan nyomásmérő eszközzel lehet, amelynek érzékelője a mozgással szembe néz (pl. az áramlással szembefordított cső ilyen). Az 1.4. ábrán egy "U" csöves nyomásmérő eszköz látható. Ennek bal oldalán a statikus nyomás, a jobb oldali szárában pedig az össznyomás jelenik meg. Ennek megfelelően a folyadék-oszlop magasság különbsége a dinamikai nyomással arányos, a műszer ilyenképpen az össznyomás és a statikus nyomás különbségét mutatja, azaz mint egy analóg számológép működik.

Amennyiben a közegben szilárd test helyezkedik el, akkor annak a felületén is keletkezik csúsztató feszültség, hacsak a közeget viszkózusnak tekintjük (vagyis nem hanyagoljuk el a viszkozitást) és a közeg illetve a test egymáshoz képest mozog. Szilárd fal esetében a közeg részecskéi a falnak ütköznek, és onnan visszapattannak. Nagyszámú részecske és érdes fal esetén feltehető, hogy a visszapattanás várható iránya nagyjából azonos az érkezés irányával. Ebből következik, hogy a szilárd falnak ütköző részecskék sebességének várható értéke a falhoz nagyon közel nulla. Hangsúlyozzuk: ez a várható érték pontosan akkor áll elő, ha egyetlen fizikai részecske sem áll meg, éppen ellenkezőleg, mindegyiknek vissza kell pattannia! Ez a nulla várható érték a fizikai alapja annak, hogy a kontinuumként tekintett közegnél, súrlódás esetén azt mondjuk, hogy a szélső réteg áll.

Ez a tapadási feltétel (ami persze megint csak elegendően nagy részecske szám esetén igaz, vagyis mikro- és nano- áramlásokban nem, ott a szélső réteg nem áll) kontinuumra vonatkozik, vagyis olyan idealizált közeg-modellre, amely a teret folytonosan tölti ki és így a szélső rétegének vastagsága infinitezimális – a legkisebb, létező részecske átmérőjénél is végtelenszer kisebb. (A későbbi tárgyalás alapját jelentő kontinuum modellt később vezetjük be.)

Vezessük be a **statikus hőmérséklet** fogalmát is: ez a részecskék rendezetlen mozgásának átlagos kinetikai energiája, egy, empirikus skálán mérve. (Ilyen, empirikus skála meglehetősen sok létezik – mi a Kelvin és a Celsius fokot használjuk.) A gázok esetében igen szemléletes kapcsolat létezik: az általános gáztörvény szerint a statikus nyomás egyenlő a sűrűség és a statikus hőmérséklet szorzatával:

$$p = R \rho T \quad (1.4)$$

Az "  $R$  " a (specifikus) gázállandó az átváltáshoz szükséges konstansként is értelmezhető. A statikus hőmérséklet szintén skalár jellegű, intenzív mennyiség, mérése a közeggel együttmozgó hőmérővel lehetséges. Nyilvánvalóan, nyugvó, vagy kis sebességgel mozgó közeg esetén álló, nyugalomban lévő hőmérővel mérhető a statikus hőmérséklet.

A **dinamikus hőmérséklet** a dinamikus nyomáshoz hasonlóan a rendezett mozgás kinetikai energiájának a mértéke, a már említett empirikus skálán. Nyilvánvalóan a dinamikus hőmérséklet csak viszonylag nagy áramlási sebességek esetében jelentős, mérsékelt sebességű áramlásokban a figyelembe vételétől gyakran eltekintenek. (Levegőben például 45 m/s sebesség kb. 1 fok dinamikus hőmérséklet felel meg.) Skalárnak tekintett, intenzív mennyiség, közvetlenül nem mérhető, viszont mérhető a statikus és dinamikus hőmérséklet összegeként definiált **összhőmérséklet** vagy **torlóponti hőmérséklet**. A mérésre az ún. torlópont-hőmérő használatos, amely a közeget – minden mozgást rendezetlenné téve – megállítja, és a megállított közeg hőmérsékletét méri.

A folyadékok és gázok – közegek – fizikai tulajdonságaikat tehát általában is az őket alkotó részecskék tulajdonságai alapján definiálhatjuk. A részecske szemléleten alapuló vizsgálat a statisztikus mechanika eszközeinek felhasználásával lehetséges (pl. Boltzmann egyenlet, rács-Boltzmann módszer, stb.) – ezzel a kérdéskörrel azonban itt nem foglalkozhatunk.

Ebben a tantárgyban az áramlástan ma már klasszikusnak tekinthető szemléletmódját, a kontinuum hipotézist és az ehhez illeszkedő, Euler-féle leírást alkalmazzuk. Ez a tárgyalás azon alapul, hogy a vizsgált közegeket a fizikai teret folytonosan kitöltő kontinuumnak tekintjük. Ez a kontinuum a részecske szemlélettel ellentétben folytonos, részei végtelen kicsik (infinitezimálisan kicsik) és ezért viselkedése, tulajdonságai többnyire folytonos függvények segítségével írhatók le. A legfontosabb függvényeket az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

Elnevezés	Matematikai leírás	Megjegyzés
Sűrűség:	$\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$	Skalár-vektor függvény.
Nyomás:	$p = p(\mathbf{r}, t)$	Skalár-vektor függvény.
Hőmérséklet.	$T = T(\mathbf{r}, t)$	Skalár-vektor függvény.
Potenciál	$U = U(\mathbf{r}, t); \text{ vagy } \varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$	Skalár-vektor függvény.
Áramfüggvény	$\psi = \psi(x, y, t)$	Skalár-vektor függvény.
Sebesség	$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}, t)$	Vektor-vektor függvény.

Megjegyezzük, hogy a vektor – vektor függvények részletesebben kiírva – esetünkben – három skalár-skalár függvényt jelentenek (vagyis ez egy *összefoglaló* jelölésnek is felfogható):

$$\begin{aligned}\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}, t) &\Rightarrow c_x = c_x(x, y, z, t); \\ &c_y = c_y(x, y, z, t); \\ &c_z = c_z(x, y, z, t); \end{aligned}$$

Ebben a jegyzetben egyébként időtől függő potenciál nem fordul elő. Hasonlóképpen e jegyzet csak az időtől független, síkáramlásokra vonatkozó áramfüggvényekkel foglalkozik – a táblázatban szereplő függvény alakokat az általánosság kedvéért adtuk meg a fenti formában.

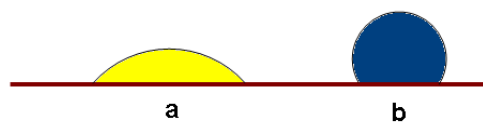
A mechanika más területein és esetenként az áramlásban is felmerül a mozgások Lagrange féle leírásának lehetősége. Ebben az esetben egyes testek – az áramlásban különféle értelemben használt részecskék – mozgását vizsgáljuk.

Legyen egy részecske helyvektora a  $t_0$  pillanatban  $\mathbf{r}_0$ , akkor bármely időpillanatbeli helyzetét megadja az alábbi függvény:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t); \quad (1.5)$$

Ez a szemléletmód magától értetődő, ha csak kevés testet kell vizsgálni (pl. a klasszikus vagy az égi mechanika legegyszerűbb feladataiban), de hatványozottan fokozódó nehézségekkel jár, ha a testek (részecskék) száma növekszik. Ezzel együtt egyes esetekben, a modern eszközök birtokában ez a nehézség legyőzhető – a korszerű áramlásban elfordulnak ilyen szemléletmódban megoldott feladatok is. Ebből a szempontból különösen nagy a jelentősége a modern áramlásban egyre inkább teret hódító statisztikai mechanikai szemléletnek, illetve módszereknek!

A közegek más közegekkel vagy testekkel való érintkezésekor adhézióval, illetve kohézióval kell számolnunk. A kohézió a közeg részecskéinek egymást vonzó hatása, az adhézió viszont hasonló, de a közeg és a test részecskéi között érvényesülő vonzó hatás.



1.5. ábra – Folyadék cseppek

Az 1.5. ábrán két folyadék csepp van: az „a” jelű a nedvesítő, a „b” jelű a nem nedvesítő a kapcsolat. A nedvesítő eset akkor jön létre, ha az adhézió nagyobb a kohéziónál. Nem nedvesítő eset viszont akkor következik be, ha a kohézió nagyobb az adhéziónál.

A kohézió az alapja a folyadékoknál megfigyelhető felületi feszültségnek is – ez a jelenség számos esetben fontos. Egyébként a szabad felszín esetleges görbülését és az ezzel együtt járó görbületi nyomást is a kohézió okozza. Ezekkel a jelenségekkel bővebben nem foglalkozunk.

## 2. Matematikai segédeszközök

Az áramlástan tananyagában viszonylag sok, esetleg összetett matematikai eljárás, művelet fordul elő. Ezek, kellő begyakorlottság esetén a tananyag elsajátítását megkönnyítik. Ahhoz viszont, hogy ezt a célt elérjük, szükség van ezeknek az ismereteknek a felfrissítésére, begyakorlására. Ehhez kíván segítséget nyújtani a 2 pont.

Az áramlástanban – a fizika sok más ágához hasonlóan – nagy szerepet játszik a Hamilton féle **nabla** operátor. A nabla operátort a következő módon szokás meghatározni:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}; \text{ illetve sorvektorként: } \nabla^T = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (2.1)$$

A Hamilton féle nabla (vektor) operátor szerepe az áramlástanban rendkívül fontos, segítségével hajtható végre néhány, az tudományterületen igen gyakran szükséges differenciálás. Skalár-vektor függvényre alkalmazva a vizsgált mennyiség **gradiens** vektorát kapjuk. Tekintsük példaként a nyomást:

$$\mathbf{grad} p = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} = \nabla p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (2.2)$$

A nyomás gradiense – például – megmutatja a nyomás-változás irányát és nagyságát. Másrészt az eredetileg skalár mennyiségből – a nyomásból (nullad rendű tenzor) – vektort (első rendű tenzort) állít elő.

A nabla operátort vektor-vektor függvényekre háromféle módon alkalmazhatjuk. Az első mód a skalár vagy belső szorzat alkalmazása – ez a **divergencia** számításához vezet:

$$\mathit{div} \mathbf{c} = \nabla^T \mathbf{c} = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}; \quad (2.3)$$

A fenti számolásban a sebesség vektor, vagy egy-indexes (elsőrendű) tenzor divergenciáját határoztuk meg. További példaként számítsuk ki a feszültség tenzor divergenciáját. Ebben az esetben – kissé nagyvonalúan eljárva – tekintsünk el attól, hogy az operátor alkalmazásának sorrendje nem kommutatív – a következő eredményre jutunk:

$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} \nabla = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

Ennél a számolásnál a két-indexes tenzorból egy-indexes tenzort, azaz vektort kaptunk. A divergencia számítás tehát a tenzorok index-számát redukálja.

A második lehetőségként, a vektori szorzat alkalmazásával a **rotációt** számítjuk ki. Ez, Descartes féle, derékszögű koordináta rendszerben az alábbi determináns kifejtésével lehetséges:

$$\operatorname{rot} \mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z} \\ \frac{\partial c_x}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial x} \\ \frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

A rotáció – ami egyébként fizikai jelentése szerint a helyi szögsebesség kétszerese – vektor mennyiség, ebben az esetben a differenciálás nem változtatja meg a tenzor rendjét.

Harmadszorra tekintsük a diadikus vagy külső szorzattal számítható **derivált tenzort**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{c} \circ \nabla^T = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \circ \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_x}{\partial x} & \frac{\partial c_x}{\partial y} & \frac{\partial c_x}{\partial z} \\ \frac{\partial c_y}{\partial x} & \frac{\partial c_y}{\partial y} & \frac{\partial c_y}{\partial z} \\ \frac{\partial c_z}{\partial x} & \frac{\partial c_z}{\partial y} & \frac{\partial c_z}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (2.6)$$

Ez a művelet egy-indexes tenzorból két-indexes tenzort állít elő. A tenzor voltát elnevezésével is hangsúlyozó derivált tenzor (kétindexes tenzor) igen jelentős szerepet kap az áramlásban. Hasonlóan fontos a feszültség tenzor (1.2 kifejezés), amely szintén kétindexes tenzor.

A nabla operátor önmagával vett skalár szorzata (ezt gyakran a nabla négyzetének nevezik) egy skalár operátort, a Laplace operátort szolgáltatja:

$$\nabla^T \nabla = \Delta = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]; \quad (2.7)$$

A differenciálási műveletek lezárásaként felírunk néhány, magasabb rendű differenciálásra vonatkozó azonosságot:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} p) = \nabla \times (\nabla p) = \mathbf{0}; \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{c}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{c}) = 0; \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} p) = \nabla^T (\nabla p) = \Delta p; \quad (2.10)$$

Ezeket az azonosságokat például számolással lehet ellenőrizni. Ajánlatos ezt – a fenti ismeretek gyakorlásának érdekében – önállóan elvégezni! Ezzel a témakörrel egyébként, megfelelő színvonalon a [21] vagy [22] – illetőleg más, hasonló irodalmi mű foglalkozik.

A további, ebben az előadás vázlatban előforduló áramlástan ismeretek elsajátításához szükség van még két integrál tételre. Tekintsük elsőként a Gauss-Osztrogradskij tételt:

$$\int_{(A)} \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{c} dV \quad \text{és} \quad \int_{(A)} \mathbf{\Pi} \mathbf{dA} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{\Pi} dV ; \quad (2.11)$$

Ebben a tételben egy egyszeresen összefüggő, zárt felületet kell kijelölni ( $A$ ) – az integrálást mindkét esetben erre a felületre, illetve az  $e$  felület által kijelölt térfogatra ( $V$ ) kell elvégezni. Megjegyezzük, hogy (2.11)-ben szereplő bal oldali kifejezés a térfogat-áramot, a jobb oldali kifejezés az eredő felületi erőt jelenti.

A másik integrál-tétel a Stokes tétel, ami szerint egy vektor mező – az áramlástanban általában a sebesség tér – egy zárt görbe mentén vett integrálja (2.12 bal oldala) egyenlő  $e$  vektor mező rotációjának a zárt görbe által határolt felületre vett integráljával (2.12 jobb oldala):

$$\oint \mathbf{c} \mathbf{ds} = \int_{(A)} \operatorname{rot} \mathbf{c} \mathbf{dA} ; \quad (2.12)$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért a felületi normális és a felületelem szorzatát egyben, felületelem-vektorként írjuk, ennek nagysága a felületelem nagysága, iránya pedig a felületi normális irányával azonos ( $\mathbf{dA} = \mathbf{n} dA$ ). Ez a megjegyzés fontos és a teljes jegyzetre érvényes!

A *circulációt* (jele:  $\Gamma$ ) egyébként éppen a fent megadott, Stokes tétel bal oldali tagjának felhasználásával szokás definiálni:

$$\Gamma = \oint \mathbf{c} \mathbf{ds} = \int_{(A)} \operatorname{rot} \mathbf{c} \mathbf{dA} ; \quad (2.13)$$

A matematikai összefoglaló csak nagyon röviden és tömören, a leglényegesebb ismereteket foglalja össze. Ezek az eszközök – kellő begyakorlás híján – elrejtetik az áramlástan anyag fizikai mondanivalóját. Ugyanakkor, megfelelő szinten elsajátítva őket könnyen átláthatóvá, egyszerűvé teszik a tananyag elsajátítását. Vagyis: ezeknek az eszközöknek az elsajátítása, készség szinten történő alkalmazása nagyon fontos. Viszont ezt senki más, csak a hallgató teheti meg, neki kell tanulnia ahhoz, hogy a matematika ne akadály, hanem segítség legyen.

## 2.1. Görbe vonalú koordináta rendszerek

Az áramlástanban is gyakran szükséges görbe vonalú koordináta rendszerek alkalmazása. Hagyományosan a henger- illetve a gömb koordináta rendszert alkalmazták, a modern főként numerikus eljárásokban azonban sokféle, akár zárt alakban meg sem adható leképezés illetve az ehhez tartozó koordináta rendszer fordul elő.

A görbe vonalú koordináta rendszerekkel kapcsolatos, részletesebb ismeretek az ezzel foglalkozó szakirodalomban található meg (pl. [2] vagy más, differenciál geometriával foglalkozó művek), itt csak a henger és a gömbi koordináta rendszer esetére térünk ki.

A henger koordináta rendszer esetében általában a  $z$  koordinátát a derékszögű koordináta tengely  $z$  tengelyével azonosnak vesszük; az  $x$  és  $y$  koordinátát pedig az  $x$ - $y$  síkban értelmezett  $r$  távolsággal és az  $x$  tengelytől mért  $\varphi$  szöggel cseréljük fel. A henger koordináta rendszert kifeszítő

három (egység) bázis vektor pedig a következő:  $e_1$  sugárirányú,  $e_2$  érintő irányú,  $e_3$  pedig a  $z$  tengely irányába mutat; a megfelelő sebesség összetevők pedig rendre a  $c_r$ ,  $c_\varphi$  és  $c_z$ . [2] nyomán rögtön a megfelelő végeredményeket írjuk fel:

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_3; \quad (2.14)$$

$$\text{div } \mathbf{c} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r c_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial c_z}{\partial z}; \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{c} = & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial c_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial c_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_2 \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r c_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_3; \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}; \quad (2.17)$$

A *gradienst* a korábban is említett nyomásra, a *divergenciát* és a *rotációt* a sebességre számítottuk ki. A *Laplace* operátort a később gyakran előforduló áramfüggvényre alkalmaztuk. Ezek természetesen csak a megértést elősegítő példák, az egyes operátorok más mennyiségekre is alkalmazhatók.

A gömbi koordináta rendszer esetében a három új koordináta rendre az origótól mért sugár ( $r$ ), a sugár  $x$ - $y$  síkba eső vetületének  $x$  tengellyel bezárt szöge ( $\varphi$ ) és a sugár  $z$  tengellyel bezárt szöge ( $\varepsilon$ ). Az első koordinátához rendelt sugárirányú egységvektor az  $e_1$ ; a második koordinátához rendelt, a szélességi kört érintő egységvektor az  $e_2$ ; végül a harmadik koordinátához rendelt, a meridián-kört érintő egységvektor az  $e_3$ . A megfelelő sebesség összetevők pedig rendre a  $c_r$ ,  $c_\varphi$  és  $c_\varepsilon$ . Ismét a végeredményeket írjuk csak fel:

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \mathbf{e}_3; \quad (2.18)$$

$$\text{div } \mathbf{c} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 c_r) + \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (c_\varepsilon \sin \varepsilon); \quad (2.19)$$

$$\text{rot } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \varepsilon} \left( \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (c_\varphi \sin \varepsilon) \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial c_r}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial}{\partial r} (r c_\varepsilon) \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r c_\varphi - \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial c_r}{\partial \varphi} \right) \end{bmatrix}; \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varepsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \sin \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right); \end{aligned} \quad (2.21)$$

A henger (cilindrikus) és gömbi (szférikus) koordináta rendszerek alkalmazása sok esetben célszerű. Alkalmazásuk lehetőségét azzal együtt érdemes vizsgálni, hogy a korszerűnek tekintett numerikus módszerek, különösen a kész szoftverek nagyon sok transzformációs kérdést is "önállóan", a felhasználó egyszerű utasítására oldanak meg.

## 2.2. A teljes, totális, szubsztanciális vagy materiális derivált

A teljes, totális, szubsztanciális vagy materiális derivált matematikai értelemben teljes deriváltat jelent. Az áramlástanban a legjelentősebb a sebesség teljes deriváltja, ami egyébiránt a teljes gyorsulást szolgáltatja. A teljes derivált sok hőtani mennyiség esetében is nagyon fontos. Legyen a következő skalár-vektor függvény „ $f$ ” valamely extenzív mennyiség sűrűség függvénye (az extenzív mennyiségek a vizsgált rendszer méreteivel arányosan változnak – ilyen pl. a közeg tömege, akkor  $f$  a közeg sűrűsége); azaz:

$$f = f(\mathbf{r}, t) = f(x, y, z, t); \quad (2.22)$$

Az extenzív és intenzív mennyiségekről további részletek a 6. fejezetben olvashatók.

Az  $f$  függvény teljes differenciálja a következő:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz; \quad (2.23)$$

A teljes differenciált differenciává írva vissza, az idő megváltozásával mindkét oldalt elosztva és végül a  $\Delta t \Rightarrow 0$  határátmenetet képezve a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{df}{dt} = \left( \frac{Df}{Dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} c_x + \frac{\partial f}{\partial y} c_y + \frac{\partial f}{\partial z} c_z; \quad (2.24)$$

A bal oldalon az anyagi, materiális vagy szubsztanciális derivált áll, ezt a nemzetközi szakirodalomban néha szokás nagy „ $D$ ” betűvel is jelölni. A jobb oldalon a  $c_x$ ,  $c_y$  és  $c_z$  a  $\mathbf{c}$  sebesség  $x$ ,  $y$  és  $z$  irányba eső összetevői, rendre a  $\Delta x/\Delta t$ ,  $\Delta y/\Delta t$  és a  $\Delta z/\Delta t$  differenciahányadosok  $\Delta t \Rightarrow 0$  esetben vett határértékei állnak. Vegyük észre, hogy az  $f$  függvény hely szerinti parciális deriváltjai éppen az  $f$  függvény gradiensét adják. Ezzel a (2.24) egyenlet a következő, tömörebb formában írható fel:

$$\frac{df}{dt} = \left( \frac{Df}{Dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}^T (\text{grad } f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}^T (\nabla f); \quad (2.25)$$

A (2.24)-et, illetve a tömörebb alakban felírt (2.25)-öt **kapcsolati egyenletnek** nevezzük. A bal oldalon álló szubsztanciális derivált egy, a közeghez kötött pontbeli teljes deriváltat jelent, azaz a közeg szempontjából együttmozgó, tehát zárt rendszerre vonatkozik. Az egyenlet jobb oldalának első tagját *lokális* (idő szerinti) deriválnak, a másodikat *konvektív* (a mozgással és a deformációval kapcsolatos) deriválnak nevezzük – ezek a deriváltak rendre külön a hely illetve az idő szerint rögzítettek, tehát a közeg szempontjából nyitott rendszerre vonatkoznak. Ezek szerint a kapcsolati egyenlet a zárt és a nyitott rendszerben értelmezett deriváltak közötti kapcsolatot írja le.

A (2.25) kapcsolati egyenletben a sebességet sor-vektorként írtuk fel, úgy, hogy a jobb oldal második tagjában lévő kifejezés a sor-oszlop kompozíció szabályt alkalmazva rögtön (formális számolással) a skalár szorzatot szolgáltatassa. A szakirodalom egy részében előszeretettel használják a (2.25) jobb oldal második tagjára a következő csoportosítást:

$$\frac{df}{dt} = \left( \frac{Df}{Dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{c}^T \nabla) f; \quad (2.26)$$



Ez a csoportosítás azt jelenti, hogy először a sebességet skalárisan szorzuk a nabla vektor-operátorral; ennek eredménye a következő, *skalár* operátor:

$$(\mathbf{c}^T \nabla) = c_x \frac{\partial}{\partial x} + c_y \frac{\partial}{\partial y} + c_z \frac{\partial}{\partial z}; \quad (2.27)$$

Alkalmazzuk ezt a skalár operátort „ $f$ ”-re; az eredmény pontosan a (2.24) jobb oldalát szolgáltatja, azaz ez a csoportosítás helyes eredményt szolgáltat. Megjegyzendő, hogy a skaláris szorzás esetén a szakirodalom nagy részében nem használják a transzponált jelölést, ezért leggyakrabban a  $(\mathbf{c} \nabla)$  alakkal találkozunk. Néha még a zárójelet is elhagyják, ami már – ha a zárójel nélküli jelölést vektor egyenletben alkalmazzák – a helyes értelmezés rovására is mehet.

A (2.24) vagy (2.25) egyenlet nem csak egy skalár-vektor függvényre írható fel, az  $f$  nyilvánvalóan egy vektor vagy tenzor összetevője is lehet. Ez esetünkben azért fontos, mert például a sebesség, a mozgás-mennyiség stb. az áramlástan számára fontos vektor mennyiség – a fenti állítás szerint pedig a kapcsolati egyenlet a sebesség (vagy más vektor-vektor függvény) komponenseire külön-külön felírható, illetve vektor-egyenletként, tömör alakban is megadható.

Tekintsük a vektormennyiségekre példaként egy elvileg tetszőleges „ $\mathbf{v}$ ” vektort. Alkalmazzuk a vektor-komponensekre a (2.25) összefüggést. Egyszerű számolással belátható, hogy a mindhárom komponens magában foglaló vektor-egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{c}^T \nabla) \mathbf{v}; \quad (2.28)$$

Válasszuk most „ $\mathbf{v}$ ” helyett az áramlástanban központi szerepet játszó, az 1 fejezetbeli táblázatbeli leírásmóddal adott (ezt az 5.1 összefüggéssel megismételjük) sebesség vektort, ezzel pontosan a gyorsulás matematikai megfogalmazásához jutunk:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{c}^T \nabla) \mathbf{c}; \quad (2.29)$$

A (2.29) egyenletben, a jobb oldal második tagjában három vektor szerepel, az ilyen szorzat nem asszociatív. Ezt a tagot az alábbi módon is fel lehet illetve fel szokás írni:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{c} \circ \nabla^T) \mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{D}\mathbf{c}; \quad (2.30)$$

A (2.30) kifejezés középső tagjában, a zárójelben a sebesség és a nabla vektor-operátor diadikus szorzata szerepel, ezt már korábban, a (2.6)-tal definiáltuk, az elnevezése derivált tenzor (jele a „ $\mathbf{D}$ ” betű). A derivált tenzor jelenősége az áramlástanban igen nagy: a kinematikai alkalmazásokon túl a csúsztató feszültség felírásakor is nélkülözhetetlen.

A fentiekben olvasható matematikai összefoglaló csak egy, nagyon rövid és tömör, a legszükségesebb ismeretekre kiterjedő segédlet. Részben rendkívül fontos, hogy kétség esetén a vonatkozó, részletes tárgyalást bemutató szakirodalomhoz kell fordulni, részben pedig *mindig* szem előtt kell tartani az ismertett összefüggések lehetséges fizikai tartalmát. E tekintetben nem csak az áramlástan vagy hőtan, de más tudományterületek is szolgálhatnak jó példákkal.

A fizikai tartalom azért is rendkívül fontos, mert a matematikai modelljeink – jó esetben – megfelelnek a fizikai valóságnak. Ennek értelmében, a matematikai modell, matematikai vizsgálatát megerősíti, kiegészíti a fizikai vizsgálat. Bonyolult esetekben, amikor egy matematikai modell megoldásának létezése nehezen bizonyítható, akkor, amennyiben az egy létező áramlás megfelelő matematikai modellje, akkor fizikai alapon valószínűsíthetjük a megoldás létezését.

Különösen fontos és nagy körültekintést igényel a numerikus áramlástan vizsgálatok matematikai és fizikai feltételeinek korrekt rögzítése. Az ilyen számítások során ugyanis a felhasználó számos lehetőség közül választhat és a kereskedelmi szoftverek felépítési filozófiájának következtében akkor is eredményt kap, ha a problémát fizikailag helytelenül definiálta. Ezekben az esetekben nem a matematikai modellel és nem a lehetséges peremfeltételekkel vagy hálózással van probléma, hanem azok helytelen – a fizikai modellnek meg nem felelő – alkalmazása, kombinációja vezethet rossz eredményre.

### 3. A térerősség és a potenciális erőterekben értelmezhető potenciál

Az általános fizikai ismeretek felfrissítéseként meghatározzuk a **térerősség** fogalmát: a térerősség valamely erőterben (esetünkben: nehézségi, tehetetlenségi, centrifugális vagy Coriolis erőter) elhelyezkedő, egységnyi tömegre ható erő:

$$\mathbf{g} [N / kg];$$

A térerősség jele talán megtévesztő: ez nem csak a gravitációs erőter térerőssége, hanem az összes fellépő erőter eredő térerősségét jelenti. Dimenzióját gyakran gyorsulás-dimenzióként adják meg, ez nem helytelen, de a térerősség fizikai tartalmára a fenti dimenzió mutat rá.

Amennyiben egy erőternek létezik **potenciálja** ( $U = U(\mathbf{r})$  – skalár-vektor függvény), akkor ebből a potenciálból a térerősség az alábbi módon számolható:

$$\mathbf{g} = -\mathbf{grad} U ; \quad (3.1)$$

A potenciál létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az erőter térerőssége rotációmentes legyen. A potenciális vagy konzervatív erőterekben a potenciál a térerősség ellenében végzendő munkaként számítható:

$$U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{g}^T \mathbf{ds} ; \quad (3.2)$$

A (3.2) kifejezés alapján belátható a fizikából jól ismert tény, ami szerint a potenciál abszolút értéke nem fontos, illetve nem is ismert – a számításokban csak a potenciál-különbség játszik szerepet. Ez – másképp fogalmazva – azt jelenti, hogy a potenciál pl. nulla értékét tetszőlegesen választhatjuk meg. Ezt, általában úgy szokás, illetve célszerű választani, hogy a nulla érték a feladat koordináta rendszerének az origójában legyen.

Az áramlástan feladatokban a leggyakrabban a nehézségi, a tehetetlenségi és a centrifugális erőter fordul elő, mint potenciális erőter. Nem potenciális erőterre tipikus példa az itt nem részletezett, forgó rendszerekben fellépő Coriolis erőter.

A nehézségi erőter potenciálja (feltéve, hogy a nehézségi erőter térerősségével párhuzamos a „z” tengely – egyszerűen fogalmazva, a „z” tengely függőleges):

$$U = \pm g z ; \quad (3.3)$$

A fenti kifejezést a köznyelvben egyszerűen egységnyi tömeg helyzeti energiájának is nevezik. Az előjel pozitív, ha a növekvő „z” értékekhez növekvő helyzeti energia tartozik: vagyis, ha a „z” tengely felfele mutat. A fent leírtak szerint a potenciál a térerősség ellenében végzett munka: mivel ebben az esetben a térerősség lefele mutat, a munkát ellene éppen a felfele mozgatással végezzük. Másrészt, matematikailag a vizsgált esetbeli pozitív előjel a (3.2) formális kiszámításából is következik. Illetve teljesül az az előbbieken tett ajánlás, ami szerint a potenciál értéke az origóban legyen nulla.

Negatív lesz a nehézségi erőter potenciál kifejezésének előjele akkor, ha a „z” tengely lefele mutat. Ekkor az egyre magasabban elhelyezett tömeg helyzeti energiája pontosan úgy növekszik, hogy a negatív előjelű kifejezésbe negatív előjelű (növekvő abszolút értékű) „z” koordinátákat írunk.

Ez, a nehézségi erőterre vonatkozó példa azt a nagyon fontos fizikai elvet is bemutatja, ami szerint egy fizikai jelenség természetesen független a koordináta rendszer választásától. Azért meg kell jegyezni, hogy elengedhetetlen a korrekt számolás és természetesen vannak alkalmas és nem igazán alkalmas koordináta rendszerek: alkalmas (jó) választással egy feladat megoldása jelentősen megkönnyíthető, ellenkező esetben, nem igazán alkalmas koordináta rendszer választása a feladat megoldásában akár legőzhetetlen nehézséget is okozhat!

Másodikként vizsgáljuk a tehetetlenségi erőteret. Most – az egyszerűség kedvéért – csak olyan eseteket vizsgálunk, ahol a tehetetlenségi erőter térerőssége vízszintes. Legyen továbbá az „x” az a vízszintes koordináta tengely, amely a térerősség egyenesével párhuzamos. Ezzel a tehetetlenségi erőter potenciálja:

$$U = \pm a x ; \quad (3.4)$$

Az általános fizikából ismert, hogy gyorsuló rendszerben lép fel a tehetetlenségi erőter és ennek térerőssége éppen ellentétes a gyorsulással.

A potenciál (3.4) szerinti kifejezésében pedig akkor kell pozitív előjelet használni, ha a térerősség értelme ellentétes az „x” tengely pozitív irányításával. Ez fizikailag úgy fogalmazható, hogy ebben az esetben növekvő „x” értékekhez növekvő helyzeti energia tartozik. Az előjelek választása tehát – értelemszerűen – a nehézségi erőternél részletesen bemutatottak szerint kell, hogy történjen.

Vizsgáljuk meg végül a centrifugális erőteret. Ebben az esetben egy olyan polár (henger) koordináta rendszert kell definiálni, melynek „r” tengelye a forgásponttól kifelé mutat. Ebben az esetben az egységnyi tömegre ható centrifugális erő:  $r\omega^2$ , ezzel a potenciál számítása (3.2 szerint):

$$U = -\int_0^r r' \omega^2 dr' = -\frac{r^2 \omega^2}{2} ; \quad (3.5)$$

A centrifugális erőterben csak a negatív előjel használata értelmes, mivel itt a koordináta tengely („r”) értelmes irányítása mindig azonos a térerősség irányításával: mindkettő kifelé mutat. A fenti kifejezés megmutatja azt, hogy mivel a potenciál abszolút értéke lényegtelen, csak a potenciál-különbség fontos, a szokás szerint az origóban a potenciál értékét nullának választhatjuk. A centrifugális erőter esetében ez azt is jelenti, hogy a legnagyobb potenciál (a forgáspontban, azaz az origóban) nulla, és kifelé, az „r” tengely mentén csökkenő potenciálok egyre kisebb negatív számok.

A potenciálokat szabad összegezni (szuperponálni), ezért egy összetett feladatban a fenti három erőter együttes hatása esetén az alábbi eredő potenciál-kifejezés használható:

$$U = \pm g z \pm a x - \frac{r^2 \omega^2}{2} ; \quad (3.6)$$

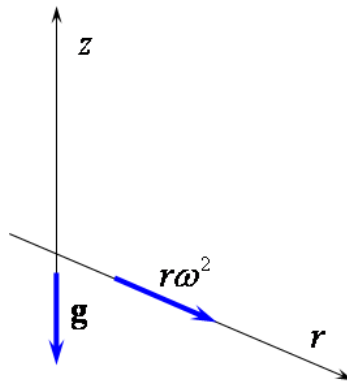
A (3.6) kifejezésben – amit számos feladat megoldásában kell használni – az előjelek két tag esetében határozatlanok: azért, mert az előjel attól függ, hogy a feladatot megoldó személy milyen koordináta rendszert választ. Vagyis – ebben az esetben is – egy-egy feladat megoldásában az (alkalmas) koordináta rendszer választása nagyon fontos, és az első lépések egyike kell, hogy legyen.

## Mintafeladat

Az erőterek és ezen belül a potenciális erőterek több tudományterületen játszanak igen fontos szerepet – így az áramlástanban is igen nagy a jelentőségük. A gyakorlati problémáknál szinte mindig jelen van valamely erőter – legfeljebb, indokolt esetben elhanyagoljuk az erőter, erőterek hatásait. Az itt bemutatott példa ugyan nem áramlástanban van – a kapott eredmények azonban egyes áramlástan feladatok megoldásának nélkülözhetetlen részét képezik. (Itt csak egy példa következik, természetesen ezen a példán túl számos más, fontos kérdés is feltehető!)

**Feladat:** határozza meg a gravitációs és centrifugális erőter együttes jelenléte esetén kialakuló, ekvipotenciális felületek egyenletét!

**Megoldás:** első lépésben válasszunk koordináta rendszert (3.1 ábra):



3.1. ábra – Henger koordináta-rendszer

Ebben a koordináta rendszerben a „z” tengely a nehézségi gyorsulás értelmével ellentétesen, felfele mutat. A henger koordináta rendszer „r” tengelye pedig a középpontból kifelé mutat – ennél az irányításnál a térerősség és a tengely pozitív irányítása azonos. A példa henger-szimmetrikus jelenséget vizsgál, így harmadik tengelyre, illetve koordinátára nincs szükség.

A korábbiakban meghatározott, általános potenciál kifejezés (3.6) erre az esetre egyszerűsítve az alábbi formában írható fel:

$$U = +g z - \frac{r^2 \omega^2}{2}; \quad (3.7)$$

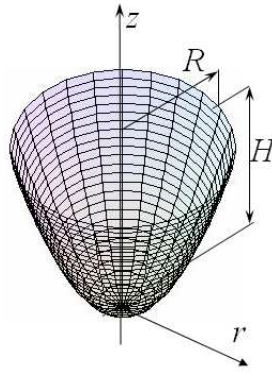
Az ekvipotenciális felületek mentén a potenciál állandó, a keresett egyenletünket az  $U = \text{áll.}$  kifejezés határozza meg. Tekintsük az egyszerűség kedvéért először azt az esetet, amikor az állandó nulla:

$$0 = g z - \frac{r^2 \omega^2}{2} \Rightarrow z = \frac{r^2 \omega^2}{2g}; \quad (3.8)$$

Általában, ha az állandó nem nulla, akkor a keresett ekvipotenciális felületek egyenletének általános alakja:

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + \text{állandó}. \quad (3.9)$$

A kapott egyenlet – (3.9) – síkban parabola, a henger koordináta rendszerben forgási paraboloid (felület). Ilyen lesz például a nehézségi erőterben forgó, folyadékot tartalmazó edényekben a folyadék felszíne (3.2 ábra – feltéve, hogy a (3.8) kifejezésben az állandó értékét nullának választjuk).



3.2. ábra – Forgási paraboloid

További feladatként számítsuk ki a 3.2 ábrán látható forgási paraboloid térfogatát. (Vagyis egyszerűen fogalmazva az a kérdés, hogy mennyi folyadék önthető az ábrán látható „edény”-be?)

A konkrétan tekintett esetben a felület egyenlete (henger koordináta rendszerben hengersizmetrikus, tehát a polár-szögtől független):

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} \quad \left( \text{és} \quad H = \frac{R^2 \omega^2}{2g} \right); \quad (3.10)$$

A teljes térfogatot az elemi henger-térfogatok integrálásával (összegzésével) határozhatjuk meg – ebben a számításban először egy elemi térfogatot ( $dV$ ) írunk fel, és meghatározzuk a két koordináta közötti – a (3.10) parabola egyenlete szerinti – kapcsolatot:

$$dV = r^2 \pi dz \quad \text{és} \quad dz = r \frac{\omega^2}{g} dr;$$

Ezzel az integrál már felírható, az egyedüli független változó a sugár, értéke 0-tól  $R$ -ig fut:

$$V = \int_0^R r^2 \pi r \frac{\omega^2}{g} dr; \quad (3.11)$$

Az integrálás elvégzése után kapott primitív függvény, (3.10)-et is figyelembe véve:

$$V = \frac{R^4}{4} \pi \frac{\omega^2}{g} = \frac{R^2 \omega^2}{2g} \frac{R^2 \pi}{2} = \frac{H R^2 \pi}{2} \quad (3.12)$$

Arra az érdekes eredményre jutottunk, hogy a forgási paraboloid belső térfogata egy „ $R$ ” sugarú, „ $H$ ” magasságú henger térfogatának éppen a felével egyenlő. Ez a henger éppen érinti a forgási paraboloidot. A térfogat felezése azt jelenti, hogy ha a paraboloidot eltávolítjuk a hengerből, akkor a visszamaradó térfogat éppen annyi lesz, mint a paraboloid belső térfogata volt. Ezt a tényt számos hidrosztatika feladat megoldásában lehet (és kell) alkalmazni.

A súrlódásos áramlások vizsgálatánál, hengeres csövek esetében, a lamináris (réteges) csőáramlások sebesség profilja is másodfokú parabola, illetve, a körszimmetria miatt forgási paraboloid felülettel jellemezhető (17.1 pont, (17.5) összefüggés). Ezért, ilyen esetben az átlagsebesség éppen a maximális (legnagyobb) sebesség fele lesz, hiszen a térfogat, valamint a térfogat-áram a változó sebesség, illetve az átlagsebesség esetében pontosan így lesz azonos.

## 4. A derivált tenzor

A derivált tenzort a (2.6) egyenlettel határoztuk meg, bevezetésével a közeg részecskéinek merevtestszerű elmozdulásait és a deformációit (hosszváltozás vagy dilatáció és szögtorzulás vagy disztorzió) írjuk le. A derivált tenzort – a szakirodalomban általában alkalmazott módon – egy szimmetrikus ( $\mathbf{D}_S$ ) és egy ferdén szimmetrikus ( $\mathbf{D}_A$ ) tenzor összegére bonthatjuk fel:

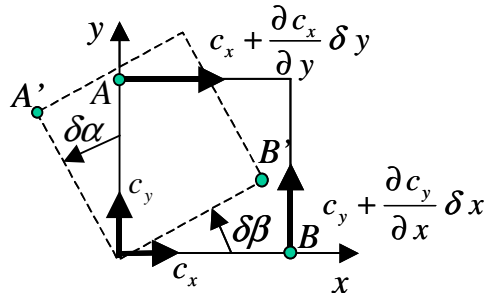
$$\mathbf{D} = \mathbf{c} \circ \nabla^T = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{D}_S + \mathbf{D}_A; \quad (4.1)$$

ahol:  $\mathbf{D}_S = \frac{1}{2} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T)$  – alakváltozási-sebesség tenzornak is nevezzük;

és  $\mathbf{D}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{D} - \mathbf{D}^T)$  – örvénytenzornak is nevezzük.

A fenti felbontás nyilvánvalóan kölcsönösen egyértelmű. A derivált tenzor egészében a konvektív gyorsulás számításában szerepel. Konvektív gyorsulás (5.1 és 5.2 ábra) származhat merevtestszerű forgásból és származhat deformációból. A derivált tenzor ferdén szimmetrikus része ( $\mathbf{D}_A$ ) a forgással kapcsolatos gyorsulás számításához szükséges. A szögsebesség értelmezéséhez vizsgáljuk a 4.1 ábrán látható, kis téglalapot, illetve annak  $\delta\alpha$  valamint  $\delta\beta$  szöggel történő elfordulását.

Az első szögelfordulás negatív előjelet kell kapjon, mivel ott a pozitív sebesség negatív elforduláshoz vezet.



4.1 ábra – Szögelfordulások

Az ábrán a pozitív forgás következtében az  $A$  pont  $\delta t$  idő alatt az  $A'$ -be, a  $B$  pont pedig a  $B'$ -be mozdul el. Ezek szerint felírható, hogy:

$$\delta\alpha = - \left( \frac{\partial c_x}{\partial y} \delta y \delta t \right) / \delta y \quad \text{és} \quad \delta\beta = \left( \frac{\partial c_y}{\partial x} \delta x \delta t \right) / \delta x;$$

Az eredő szögsebesség számításához vegyük a két szögelfordulás átlagát, osszuk el  $\delta t$  - vel és tekintsük a  $\delta t \Rightarrow 0$  határértéket. Ennek a levezetésnek az eredménye – nyilvánvalóan – a szögsebesség “z” irányú összetevője lesz:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} \right); \quad (4.2)$$

Ezt a gondolatmenetet minden további nélkül meg lehet ismételni az  $x$  és az  $y$  tengely körüli szögsebesség összetevőkre is. Mindössze a jobbsodrású koordináta rendszerekben értelmezett pozitív elfordulási irányt kell szem előtt tartani. Végeredményben a szögsebességre a következő kifejezést kapjuk:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} (\partial c_z / \partial y - \partial c_y / \partial z) / 2 \\ (\partial c_x / \partial z - \partial c_z / \partial x) / 2 \\ (\partial c_y / \partial x - \partial c_x / \partial y) / 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{c}; \quad (4.3)$$

(4.3) felírásakor – figyelembe véve (2.5)-öt – megkapjuk a szögsebesség és a sebességtér rotációja közötti kapcsolatot: a sebességtér rotációja a kontinuum helyi szögsebességének kétszerese. Ezt a rotációt egyes esetekben örvényességnek is nevezik.

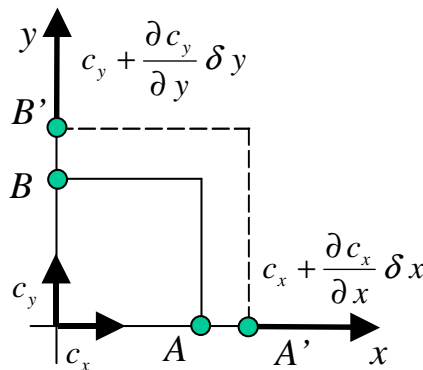
Számítsuk ki a derivált tenzor ferdén szimmetrikus részét, illetve ennek a sebességgel való szorzatát. Ekkor a következő eredményre jutunk:

$$\mathbf{D}_A \mathbf{c} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}; \quad (4.4)$$

A derivált tenzor ferdén szimmetrikus részével történő szorzás tehát azonos a szögsebességgel balról történő vektori szorzással, ezért  $\mathbf{D}_A$ -t örvénytenzornak is nevezzük. Ha a fenti szorzatba a szögsebesség helyére a rotáció vektort írjuk, akkor az általános mechanikából jól ismert, Coriolis gyorsulás kifejezéséhez jutunk:

$$\mathbf{a}_c = \text{rot } \mathbf{c} \times \mathbf{c} = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}; \quad (4.5)$$

A derivált tenzor másik, szimmetrikus részének ( $\mathbf{D}_S$ ) – mivel a konvektív gyorsulás merev testszerű mozgásból és deformációkból származik – a fizikai tartalma a deformációkkal kell kapcsolatos legyen, ezért is nevezzük ezt a rész tenzort alakváltozási-sebesség tenzornak. Tekintsük először a hossz változást – azaz a dilatációt.



4.2 ábra – Hosszváltozások

A 4.2 ábrán feltüntetett A pont  $\delta t$  idő alatt az A'-be, a B pont pedig a B'-be mozdul el. Az x és az y tengely mentén bekövetkező, hosszváltozás:

$$\delta_x = \frac{\partial c_x}{\partial x} \delta x \delta t \quad \text{és} \quad \delta_y = \frac{\partial c_y}{\partial y} \delta y \delta t;$$

A „z” tengely menti hosszváltozás értelemszerűen, a fenti kifejezésekhez hasonlóan írható fel. Osszuk el a fenti kifejezéseket rendre  $\delta x$ -szel,  $\delta y$ -nal és a z tengely menti hosszváltozás kifejezését  $\delta z$ -vel; ezek lesznek a fajlagos (relatív) hosszváltozások.

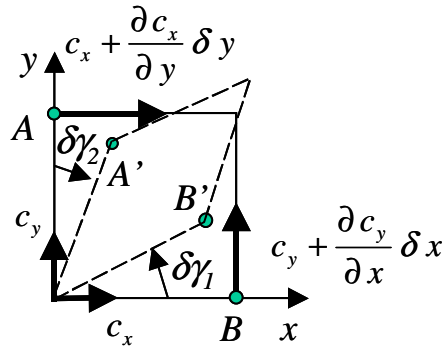
Számítsuk ki a hosszváltozási sebességeket (ez egyszerűen a  $\delta t$  - vel való osztás és a  $\delta t$  tart nullához határátmenet képzését jelenti):

$$\dot{\delta}_x = \frac{\partial c_x}{\partial x}; \quad \dot{\delta}_y = \frac{\partial c_y}{\partial y}; \quad \dot{\delta}_z = \frac{\partial c_z}{\partial z}; \quad (4.6)$$



Tekintsük másodszerre a szögtorzulást, vagy disztorziót. A 4.3 ábrán feltüntetett  $A$  pont  $\delta t$  idő alatt az  $A'$ -be, a  $B$  pont pedig a  $B'$ -be mozdul el. A „z” tengely körüli szögtorzulás a két része:

$$\delta \gamma_1 = \left( \frac{\partial c_y}{\partial x} \delta x \delta t \right) / \delta x \quad \text{és} \quad \delta \gamma_2 = \left( \frac{\partial c_x}{\partial y} \delta y \delta t \right) / \delta y;$$



4.3 ábra – Szögtorzulások

A szögtorzulások összege:

$$\delta \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} \right) \delta t;$$

A szögtorzulások a sebesség változásnak megfelelő előjellel rendelkeznek, ezért kell őket összegezni. Az „xy” index pedig azt fejezi ki, hogy ez a szögtorzulás az  $x$ - $y$  síkban jön létre. A szögtorzulási sebességet a  $\delta t$ -vel való osztás és a  $\delta t \Rightarrow 0$  határérték-képzés után kapjuk.

Írjuk fel mindhárom, lehetséges szögtorzulási sebességet:

$$\dot{\gamma}_{xy} = \left( \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} \right); \quad \dot{\gamma}_{xz} = \left( \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x} \right); \quad \dot{\gamma}_{yz} = \left( \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} \right); \quad (4.7)$$

Határozzuk meg a derivált tenzor szimmetrikus részét:

$$\mathbf{D}_S = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_y}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial c_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_z}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_z}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial c_z}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (4.8)$$

Vagyis, rövidebben:

$$\mathbf{D}_S = \begin{bmatrix} \dot{\delta}_x & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{\delta}_y & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{\delta}_z \end{bmatrix};$$

Vagyis a (4.8) kifejezéssel adott tenzor rész a főátlójában a hosszváltozási sebességeket, a további elemeiben pedig a szögtorzulási sebességeket tartalmazza. A szögtorzulási sebességek indexeinek felcserélése az adott összeg tagjainak felcserélését jelenti. Az összeadás kommutatív művelet, ezért ezek az elemek azonosak, vagyis az így felírt tenzor valóban szimmetrikus.

Határozzuk meg az alakváltozási-sebesség tenzor főátlóbeli elemei összegének fizikai tartalmát. Számítsuk ki ezért az előző példákban szereplő,  $\delta x$ ,  $\delta y$  és  $\delta z$  élhosszúságú téglalest térfogat változásának sebességét. Határozzuk meg először a térfogat változást:

$$\Delta(\delta V) = [\delta x + \Delta(\delta x)][\delta y + \Delta(\delta y)][\delta z + \Delta(\delta z)] - \delta x \delta y \delta z; \quad (4.9)$$

Hagyjuk el a másod- és harmadrendűen kicsi tagokat és osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a kiinduló térfogattal:

$$\frac{\Delta(\delta V)}{\delta V} = \frac{\Delta(\delta x)}{\delta x} + \frac{\Delta(\delta y)}{\delta y} + \frac{\Delta(\delta z)}{\delta z}; \quad (4.10)$$

A fenti egyenlet mindkét oldalát osszuk el  $\delta t$ -vel és számítsuk ki a  $\delta t \Rightarrow 0$  határátmenetet. A jobb oldalon rendre az egyes relatív hosszváltozási sebességek jelennek meg. A végeredmény a következő lesz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\Delta(\delta V)}{\delta V} \right] &= \dot{\delta}_x + \dot{\delta}_y + \dot{\delta}_z = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = \nabla^T \mathbf{c} \\ &= \text{div} \mathbf{c}; \end{aligned} \quad (4.11)$$

Eszerint tehát a relatív térfogat változási sebesség, ami a derivált tenzor szimmetrikus részének főátlójában álló elemeinek összege, éppen a sebességtér adott pontjában vett divergenciájával egyenlő. A derivált tenzor szimmetrikus részének többi eleme, a szögtorzulási sebességek, a későbbiekben – más alkalmazások mellett – a súrlódás tárgyalásában, a feszültség tenzor felírásában játszik majd döntő szerepet.

A sebesség divergenciájának fizikai tartalmát a mérleg egyenlet segítségével is igazolhatjuk – válasszuk a (6.10) egyenletben szereplő „ $f$ ”- függvényt azonosan egynek és a forrás erősséget, értelemszerűen azonosan nullának, akkor:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V dV, \text{ és } f(r, t) \equiv 1; \text{ akkor: } \frac{d}{dt} \int_V dV = \int_A \mathbf{c} \mathbf{dA}; \quad (4.12)$$

Végeredményben, a Gauss-Osztrogradszkij tétel alkalmazásával:

$$\frac{dV}{dt} = \int_A \mathbf{c} \mathbf{dA} = \int_V \text{div} \mathbf{c} dV; \quad (4.13)$$

Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a véges „ $V$ ” térfogat dilatáció (tágulás vagy összenyomódás) sebessége az elemi „ $dV$ ” térfogatok dilatáció sebességének az összege, azaz a  $\text{div} \mathbf{c}$  valóban az egységnyi kontinuum térfogat térfogat-változási sebességét jelenti.

Például, a (15.3) kifejezésben, ahol a feszültség tenzor súrlódásból származó rész-tenzorát határozzuk meg, a csúsztató feszültségek számításában valóban a derivált tenzor szimmetrikus része szerepel.

A derivált tenzornak a koordináta transzformációk, a görbevonalú koordináta rendszerek alkalmazása esetén is fontos szerepe van. Ebből a szempontból is érdekes és fontos a derivált tenzor skalár és vektor invariánsa. Ezek az invariánsok ugyanis a transzformáció során nem változnak. (Csak szemléltetésül említjük meg, hogy egy forgástengely, illetve az azt kijelölő szögsebesség – vagy éppen rotáció – vektor egy esetleges elforgatás során nem változik.)

Itt csak utalunk a szakirodalomra: erről a kérdésről az irodalomjegyzékben felsorolt szinte mindegyik könyvben bővebben is lehet olvasni.

## 5. Kinematika

Az áramlástan egyik nagyon fontos bevezető fejezete a kinematika. A kinematika a mozgások leírási módszereit foglalja össze; a folyadékok és gázok mozgását célszerűen az erre a területre kifejlesztett eszközökkel írhatjuk le. Elsőként a Lagrange féle leírásmódot említjük – ez a leírási mód kevésbé használatos, bár napjainkban egyes numerikus módszerek miatt az alkalmazási köre bővül. A Lagrange féle tárgyalásmód lényegében azonos a szilárd testek mozgásának leírásával. E tárgyalásmódot részletesebben nem ismertetjük, az érdeklődő pl. a [2] segítségével ismerkedhet meg vele részletesen.

A jegyzetben közölt ismeretanyag az Euler féle tárgyalásmódra épül. Ezt a leírási módot Leonhard Euler kifejezetten a folyadékok mozgásának leírására fejlesztette ki. Ebben a tárgyalásmódban a vizsgált közeget kontinuumnak tekintjük, azaz a közeg a teret matematikai értelemben is folytonosan tölti ki – tehát a véges méretű anyagi részecskéket folytonosan elosztjuk a térben. Ez teszi lehetővé a határértékek, differenciál-hányadosok, illetve hasonló matematikai eszközök alkalmazását. Az Euler féle szemléletmód tehát lehetővé teszi fizikai terek megadását. Ilyen pl. a sebességtér, ami éppen a kinematikai fejezet tárgya. Ebben a tárgyalásmódban a kinematikán túl, a közegek további jellemzőit is fizikai térként adjuk meg, vagyis a nyomás, a hőmérséklet, a sűrűség illetve származtatott mennyiségként a tömegáram, mozgásmennyiség és perdület is skalár-vektor vagy vektor-vektor függvénnyel adható meg. A sebességtér a következő vektor-vektor függvénnyel adható meg:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}, t); \quad (5.1)$$

vagy, összetevőnként kiírva:

$$c_x = c_x(x, y, z, t);$$

$$c_y = c_y(x, y, z, t);$$

$$c_z = c_z(x, y, z, t);$$

ahol:  $\mathbf{r}$  - a fizikai tér megfelelő pontjának helyvektora;

$c_x, c_y, c_z$  - a sebesség megfelelő komponensei;

$x, y, z$  - az  $\mathbf{r}$  helyvektor koordinátái;

$t$  - az idő.

Az **áramvonal** a sebességmező vektorainak egy, adott pillanatban vett burkoló görbéje – az áramvonal-ívelemmel ( $d\mathbf{s}$ ) tehát a sebesség vektor párhuzamos, azaz a párhuzamosság miatt a vektori szorzatuk nulla:

$$\mathbf{c} \times d\mathbf{s} = \mathbf{0}; \quad (5.2)$$

Az (5.2)-beli vektor szorzat kifejtése alapján megállapíthatjuk, hogy a sebesség összetevők és a megfelelő ívelem összetevők aránya a következő (hiszen a vektori szorzatot (2.5) szerinti kifejtése szerint a determináns második és harmadik sorának egymás többszörösének kell lennie):

$$c_x : c_y : c_z = dx : dy : dz; \quad (5.3)$$

A **pályavonal** egy (kijelölt) elemi folyadékrészecske útja. Itt elvileg a kontinuum egy elemi részecskéjéről van szó, aminek a mérete tetszőlegesen pozitív számnál is kisebb, vagyis ez egy matematikai értelemben infinitezimális részecske. Kevésbé pontosan néha a tényleges fizikai részecske útját is pályavonalnak nevezik.

A **nyomvonal** az a vonal, amely mentén, egy pillanatban a tér egy adott pontján addig áthaladt (elemi) részecskék sorakoznak. Ilyen vonalat láthatunk pl. egy szélcsatorna vizsgálat esetében, amikor az áramlásba egy ponton füstöt vezetünk be.

Az áram-, pálya- és nyomvonal stacionárius áramlás esetében – olyan áramlásban, ahol a sebesség az időben nem változik – azonos. Az áramlások stacionaritása vagy időállósága függhet a megfigyelő nézőpontjától (a vizsgálathoz felvett koordináta rendszertől). A vizsgálatokhoz szükséges koordináta rendszert tehát kellő figyelemmel érdemes kiválasztani.

Amennyiben az (5.1) kifejezéssel adott sebességtér a tér egy-egy pontjához pontosan egy sebességet rendel, akkor a tér ezen pontjaiban szintén egy és csak egy áramvonal haladhat át; azokban a pontokban, ahol a sebesség többértékű, több áramvonalat is találunk. Ezeket a pontokat **szinguláris** pontoknak nevezzük. Ilyen szinguláris pont például egy forrás vagy egy nyelő, ahol végtelen sok sebesség és áramvonal értelmezhető. Az áramvonalak esetenként áramfelületeket vagy áramcsöveket alkothatnak – ezeket kinematikai alakzatoknak is nevezzük. Síkáramlások esetében az áramvonalak alkalmazása nagyon fontos és érdekes eredményekre vezet.

Az **örvényesség** a sebességtér rotációja, meghatározása az általunk általában alkalmazott Descartes féle derékszögű koordináta rendszerben (2.5) szerint lehetséges. A rotáció, amint azt az elnevezése is mutatja, a folyadéktér forgásával kapcsolatos mennyiség (a pillanatnyi szögsebesség kétszerese – (4.3) kifejezés). Az áramvonalhoz hasonlóan, azokat a vonalakat, amelyek egy adott pillanatban az örvényesség burkoló görbéi, örvényvonalnak nevezzük – ekkor tehát az örvényesség párhuzamos az örvényvonal ívelem vektorával:

$$\text{rot } \mathbf{c} \times d\mathbf{s} = \mathbf{0}; \quad (5.4)$$

Az örvényvonalakból – az áramvonalakhoz hasonlóan – örvényfelületeket és örvénycsöveket lehet összeállítani. Ez utóbbi alakzatok fontos szerepet játszanak az örvénytételek megfogalmazásánál, illetve bizonyításánál.

Az (5.1) típusú sebességtér egy, általában térben és időben változó fizikai teret ad meg, azaz a sebesség a hely és az idő függvénye; a gyorsulások meghatározásánál a tér- illetve idő szerinti megváltozását valamint ezek összegét kell figyelembe venni. A térbeli változás alapján számított deriváltat idegen szóval konvektív, az időbeli változás alapján számolt deriváltat lokális, a kettő összegét teljes, totális vagy szubsztanciális gyorsulásnak nevezzük el. Tekintettel arra, hogy az Euler féle tárgyalásmódban a közegek további jellemzői (nyomás, sűrűség, hőmérséklet stb.) szintén fizikai mezőként adóttak, a sebesség változásával kapcsolatban tett megállapítások általánosíthatók. Ezek a sebességtérhez hasonlóan lokális, konvektív és teljes deriváltakal rendelkeznek. A lokális és konvektív derivált rögzített helyen illetve időpontban tekintendő, így ezek a közeggel nem mozognak együtt – ezek nyitott rendszerre vonatkoznak. Ezzel szemben a teljes derivált a közeg egy pontjára vonatkozik, vagyis együttmozgó azaz zárt rendszerre vonatkozó deriváltat jelent. Ezért nevezik még anyagi-, vagy materiális deriválnak is.

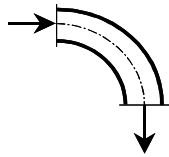
A sebesség idő szerinti megváltozása, a **teljes gyorsulás** az alábbi módon írható fel (bevezetése a 2.pontban olvasható):

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{c} \circ \nabla^T) \mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{D}\mathbf{c}; \quad (5.5)$$

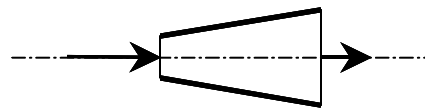
Az (5.5) kifejezésben, a második egyenlőségjel utáni második tagban, a zárójelben a sebesség és a nabla vektor-operátor diadikus szorzata szerepel, ezt derivált tenzornak nevezzük (jele a „**D**”)

betű). Bevezetése a konvektív gyorsulás elemeinek fizikai értelmezését teszi szemléletessé; a közeg-részek forgására és deformációjára vonatkozó, korábban (4. fejezetben) bemutatott információkat hordozza. Az (5.5) egyenlet adja meg tehát a közeg gyorsulásait: a bal oldalon a **teljes, totális** vagy **szubsztanciális** gyorsulás áll, a jobb oldalak mindegyikében az első tag a **lokális**, a második a **konvektív** gyorsulás.

Ezek a gyorsulás-típusok eltérnek a merev testek mechanikájában szereplő gyorsulásoktól, ezért fizikai értelmezésük céljából néhány példát mutatunk be. Lokális gyorsulás akkor létezik, ha a sebesség egy pontban, az idő függvényében változik. Tipikus példa erre egy (szakaszonként állandó keresztmetszetű) csővezeték, amelyben időben változó folyadékmennyiség halad (pl. vízvezeték stb.) A lokális gyorsulást tehát egy adott helyen, valamely  $t$  és  $t + \Delta t$  pillanatban mért sebességkülönbséggel szemléltethetjük.



5.1. ábra – Konvektív gyorsulás, irányváltozás következtében



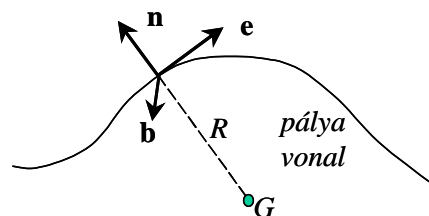
5.2. ábra – A sebesség nagyságának megváltozása miatti konvektív gyorsulás

A konvektív gyorsulás a sebesség irányának vagy nagyságának adott pillanatbeli megváltozásából származik. Az 5.1. ábrán a sebesség irányváltozása figyelhető meg: a könyökcsőben (az egyéb változásoktól most eltekintve) a sebesség iránya a belépéstől a kilépésig, pontról pontra változik.

A sebesség abszolút értékének - a sebesség nagyságának változására szemléletes példa egy szűkülő (konfúzor) vagy bővülő (diffúzor) csőidombeli, időben állandósult áramlás. Ezekben a csőidombokban a sebesség iránya a középvonal mentén nem változik, a nagysága azonban – az 5.2. ábra tanúsága szerint – igen. Lokális és konvektív gyorsulás ezen a két, igen leegyszerűsített példán kívül természetesen számos más esetben is létrejön.

A teljes, totális vagy szubsztanciális gyorsulás az eddig bemutatott, kétféle gyorsulás összege (ha az egyik gyorsulástípus nulla, akkor a teljes gyorsulás azonos a másik, nem nulla gyorsulással). Illetve a teljes, totális, szubsztanciális vagy materiális gyorsulás nulla, ha mindkét rész gyorsulás nulla vagy egyik kiejti a másikat (a második lehetőség meglehetősen ritkán fordul elő).

A pályavonal egy, kijelölt részecske útja. A pályavonalhoz rendelhető az érintő ( $\mathbf{e}$ ), a normális ( $\mathbf{n}$ ) és a binormális ( $\mathbf{b}$ ) egység-vektorból álló kísérő triéder. Ezek jobb rendszert alkotnak. A továbbiakban szorítkozunk az időálló (stacionárius) áramlások esetére. Ekkor egyébként az áramvonal, a pályavonal és a nyomvonal azonos.



5.3. ábra – Kísérő triéder

A kísérő triéder által kifeszített koordináta rendszer alkalmazása azért jelent egyszerűsítést, mert ebben a rendszerben a sebesség érintő irányú, a másik két összetevője azonosan nulla. A stacionaritás miatt csak konvektív gyorsulás létezik és a konvektív gyorsulásnak is csak érintő és normális irányú összetevője van, a binormális irányban gyorsulás sincs

Az érintő irányú konvektív gyorsulás, a sebességgel mint skalár mennyiséggel számolva:

$$a_e = c \frac{\partial c}{\partial e}; \quad (5.6)$$

A konvektív gyorsulás másik összetevője a pálya görbületétől is függő centripetális gyorsulás, ennek az általános mechanikából ismert alakja:

$$a_{cp} = -\frac{c^2}{R}; \quad (5.7)$$

Az áramlástanban a **konvektív gyorsulás** többféle alakját használjuk. A következőkben talán a legelterjedtebben használt alakot vezetjük be. Bontsuk fel a derivált tenzort a következő módon:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T + (\mathbf{D} - \mathbf{D}^T); \quad (5.8)$$

A felírás helyessége nyilvánvaló. A konvektív gyorsulást a sebesség és a derivált tenzor szorzata szolgáltatja. Szorozzuk a fenti egyenlet jobb oldalának első tagját a sebességgel:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^T \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial c_x}{\partial x} c_x + \frac{\partial c_y}{\partial x} c_y + \frac{\partial c_z}{\partial x} c_z \\ \frac{\partial c_x}{\partial y} c_x + \frac{\partial c_y}{\partial y} c_y + \frac{\partial c_z}{\partial y} c_z \\ \frac{\partial c_x}{\partial z} c_x + \frac{\partial c_y}{\partial z} c_y + \frac{\partial c_z}{\partial z} c_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \\ \frac{\partial}{\partial y} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \\ \frac{\partial}{\partial z} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{grad} \left( \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{c}}{2} \right) = \mathbf{grad} \frac{c^2}{2}; \end{aligned} \quad (5.9)$$

Az (5.9) egyenlet jobb oldalán a  $\mathbf{c}^T \mathbf{c}$  szorzatot hagyományosan  $c^2$ -nek szokás írni; a skaláris vagy belső szorzattal történő felírás közvetlenül mutatja a sebességvektor négyzetének kiszámítási módját. A sebesség négyzetének gradiensét például a Bernoulli egyenlet levezetésekor használjuk majd fel.

A  $(\mathbf{D} - \mathbf{D}^T) \mathbf{c}$  jelentése (egyszerű számolással ellenőrizhető):

$$(\mathbf{D} - \mathbf{D}^T) \mathbf{c} = \mathbf{rot} \mathbf{c} \times \mathbf{c}; \quad (5.10)$$

Ezt a szorzatot fordított sorrendben szokás felírni, hogy zárójel nélkül is rögtön látni lehessen: a rotáció operátor a sebességre vonatkozik. A totális vagy szubsztanciális gyorsulás igen gyakran alkalmazott alakja tehát a (5.9) és (5.10) összegeként írható fel – ez (5.11) két, utolsó tagja.

A totális gyorsulás tehát egyenlő a lokális gyorsulás (a jobb oldal első tagja) és a konvektív gyorsulás (a jobb oldal második és harmadik tagja) összegével:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \mathbf{rot} \mathbf{c}; \quad (5.11)$$

Az (5.11) bal oldala tehát a teljes (totális, szubsztanciális, materiális) gyorsulás. Ez a gyorsulás az a gyorsulás, ami – egyszerűen fogalmazva – Newton II. törvényébe (ami a mozgásmennyiség megmaradásán alapuló törvény) beírandó.

A teljes gyorsulásnak pedig, az Euler féle szemléletmód alkalmazása miatt van lokális gyorsulás összetevője (5.11 jobb oldali első tagja – adott, rögzített helyen, az idő szerint változó sebesség) és konvektív összetevője (5.11 jobb oldalán a második és harmadik tag).

Amennyiben egy áramlásban létezik lokális gyorsulás (nem nulla), akkor azt az áramlást időben változó áramlásnak, latinul *instacionárius*nak nevezzük. Ha a lokális gyorsulás azonosan nullak, akkor az áramlás időben állandó, latinul *stacionárius*. Az időben állandó áramlásnak másik, szintén latin eredetű, kissé ritkábban használt elnevezése a *permanens* áramlás.

A kinematika az áramlástan fontos fejezete, nagy a jelentősége a gyakorlati feladatok megoldásában is. Ennek az áramlástan kurzusnak a sajátosságai miatt főként elméleti kérdések adódnak erről a területről. Példaként tekintsük a következő kérdést:

Milyen gyorsulás fajtákat ismer? Határozza meg ezek tenzor-, vektor formában történő számításának módját! Mutasson rá ezek fizikai tartalmára, különös tekintettel egy-egy részecske lehetséges mozgásformáira. Ennek a feladatnak a konkrét megoldását külön nem ismertetjük, hiszen a feltett kérdésekre adandó válasz a korábbi anyagban olvasható – a feladat mindössze a válasz elemeinek összegyűjtése.

A tananyag iránt mélyebben, a vizsgakövetelményeken túlmenően érdeklődő hallgatók ilyen típusú feladatokat a [7] példatár 12. „Kinematika” című fejezetében találhatnak.



## 6. A mérleg-egyenlet

A folyadékok mozgásának dinamikáját a fizika megmaradási elveire alapozva építjük fel. Ennél ugyan van általánosabb lehetőség is (pl. a variációs elvekre történő alapozás – és ez a tárgyalásmód egyes, numerikus módszerekhez kapcsolódva terjed is), azonban a jegyzet célját tekintve a megmaradási elvek – anyag-, mozgásmennyiség-, energia- és perdület-megmaradás – jelentik a legmegfelelőbb alapot.

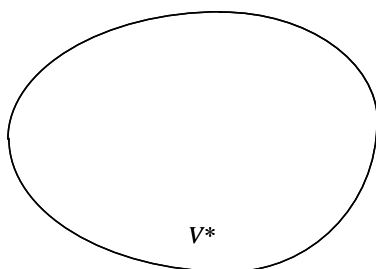
A megmaradási elveket általánosságban a mérleg-egyenlet segítségével fogalmazhatjuk meg. Minden megmaradási elvnek megvan az integrál, illetve differenciál-egyenlettel leírt alakja. A konkrét egyenletek azonban a mérleg-egyenlet megfelelő alakjából származtathatók.

Az áramlástanai mennyiségek – a többi fizikai mennyiséghez hasonlóan – extenzívek vagy intenzívek lehetnek. Az extenzív jellemzők a vizsgált rendszer méreteivel arányosan változnak, az intenzívek viszont a rendszer darabolásával nem változnak. Jellemző példa az extenzív mennyiségre a tömeg; az intenzív mennyiségek csoportjának pedig pl. a nyomás az egyik jellemző tagja.

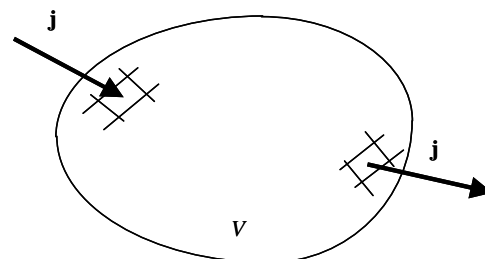
Zárt rendszerek egészét tekintve az extenzív jellemzők értéke állandó. Ez az állandóság jelenti a megmaradást.

A fizika megmaradási elveit zárt rendszerekre mondjuk ki. Ezzel szemben a mérnöki gyakorlatban meglehetősen ritka a valamilyen értelemben (pl. anyag, mozgásmennyiség, energia vagy perdület átadás szempontjából) zárt rendszer. A mérleg- vagy transzport-egyenlet segítségével, a rendszerhatárokon átlépő áramok (pl. anyag, mozgásmennyiség, energia vagy perdület áram) figyelembe vételével nyílt rendszerekre is felírhatók a megmaradási elveken alapuló egyenletek. Ezek a matematikai egyenletek (is) szükségesek a modellezendő fizikai folyamatok leírásához.

Tekintsünk egy, egyszeresen összefüggő, zárt térfogatot ( $V^*$  - 6.1 ábra), illetve tekintsünk egy, a műszaki gyakorlatban használatos nyitott rendszert ( $V$  - 6.2 ábra), ahol jelölje „ $\mathbf{j}$ ” a felületen átlépő áramokat (pl. tömeg-áram, mozgásmennyiség-áram, energia-áram stb.):



6.1. ábra – Fizikai szempontból zárt rendszer



6.2. ábra – Fizikai szempontból nyitott rendszer

A **zárt rendszerek** valamely, a folyadékhoz kötött rendszert jelentenek, e rendszerek határán tehát fizikai áram (tömeg, mozgásmennyiség, energia stb.) nincs. Számítsuk ki azt az extenzív mennyiséget, aminek a sűrűség-függvényét a 2. pontban, a (2.22) kifejezéssel vezettük be:

$$\Phi = \int_{V^*} f(\mathbf{r}, t) dV^*; \quad (6.1)$$

A kifejezésben szereplő " $V^*$ " a folyadékhoz kötött, egyszeresen összefüggő, zárt térfogat. Erre a " $\Phi$ " extenzív mennyiségre vonatkozó mérleg-egyenlet a következő:

$$\frac{d}{dt} \Phi = \frac{d}{dt} \int_{V^*} f(\mathbf{r}, t) dV^* = Q; \quad (6.2)$$

ahol:  $Q$  - a kijelölt " $V^*$ " térfogatban helyet foglaló (esetleges) forrás.

A (6.2) mérleg-egyenletben, tekintettel arra, hogy a kijelölt " $V^*$ " térfogat mindig azonos folyadékreszeket tartalmaz (tehát ilyen értelemben nem változik) és az integrál az időnek differenciálható függvénye, a differenciálás és az integrálás felcserélhető:

$$\frac{d}{dt} \int_{V^*} f(\mathbf{r}, t) dV^* = \int_{V^*} \frac{d}{dt} (f dV^*); \quad (6.3)$$

Az integráljel után kijelölt differenciálás elvégezhető, ennek pontos matematikai levezetésére nem térünk ki, az pl. [23]-ban megtalálható. Az eredmény a mérleg-egyenlet **zárt rendszerre** érvényes, **integrál alakja**:

$$\int_{V^*} \left( \frac{df}{dt} + f \nabla^T \mathbf{c} \right) dV^* = Q; \quad (6.4)$$

Megjegyezzük, hogy a (6.4) kifejezésben megjelenő " $\nabla^T \mathbf{c} = \text{div} \mathbf{c}$ " éppen a térfogat-változás sebessége, amit a 4. fejezet végén, kétféleképpen is megmutattuk. Vezessük be a forrás-sűrűséget (" $q$ "), úgy, hogy a " $Q$ " teljes forrást a forrás-sűrűség térfogati integrálja szolgáltatassa. Így a (6.4) minden tagja térfogati integrálként írható fel:

$$\int_{V^*} \left( \frac{df}{dt} + f \nabla^T \mathbf{c} \right) dV^* = \int_{V^*} q dV^*; \quad (6.5)$$

Tekintettel arra, hogy az egyszerűen összefüggő, zárt " $V^*$ " térfogatról csak annyit kötöttünk ki, hogy annak a folyadékhoz rögzítettnek kell lennie, ezért az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az integrálandó függvények egyenlőek, azaz:

$$\frac{df}{dt} + f \nabla^T \mathbf{c} = q; \quad (6.6)$$

Ezzel a mérleg-egyenlet **zárt rendszerre** vonatkozó **differenciál-egyenlet** alakjához jutottunk. Az egyenlet jobb oldalán a forrás-sűrűség (röviden forrás) található. Közismert például, hogy az anyagmegmaradás esetében a forrás (ez egy előjeles valós szám, ha pozitív, akkor a szó szorosabb értelmében is forrásról beszélünk, ha azonban negatív, akkor nyelőről van szó) egy tényleges forrást (nyelőt) jelent, amit például egy csövön érkező külső folyadékként képzelhetünk el. A mozgásmennyiség szempontjából forrást jelent például a gravitációs erőter térerőssége vagy más, külső erő is. A perdület-változás oka (forrása) valamely, külső nyomaték és – természetesen – léteznek energiaforrások vagy energia-nyelők is. Esetünkben az egyik leggyakoribb energiaforrás egy munkagép (pl. szivattyú, ventilátor stb.), energia-nyelő pedig egy erőgép (pl. hidromotor, hidraulikus munkahenger stb.) lehet.

Az áramlástan általunk tárgyalt ismeretanyagában lényeges szerepet játszó forrásokról a megmaradási elvek konkrét tárgyalásánál szólnunk részletesebben. A mérleg-egyenlet alapvető fizikai tartalma a megőrzés vagy megmaradás, a részletes fizikai tartalomra a konkrét megmaradási elvek tárgyalásakor térünk ki.

Amint már említettük, a műszaki gyakorlatban sokszor **nyitott rendszerrel** kell dolgozni. Nyitott rendszerről akkor beszélünk, ha a kijelölt, egyszerűen összefüggő, matematikai értelemben zárt térfogat (jele: " $V$ ") nem mozog együtt a folyadékkal, így a határoló felületén a szóban forgó extenzív mennyiség ki- illetve beáramlik. Mivel a zárt térfogat felületi normális

kifeje pozitív, ezért a kilépő áram lesz a pozitív, a belépő pedig negatív – emiatt az áram elé negatív előjelet kell írni. A **nyitott rendszerre** érvényes mérleg-egyenlet kiinduló alakját (6.2)-höz hasonlóan írhatjuk fel, a jobb oldalt azonban ki kell egészíteni a fent említett árammal (jele: "I"):

$$\frac{d}{dt} \Phi = Q - I; \quad (6.7)$$

Vezessük be a felületi áramsűrűség fogalmát (jele: " **j** "). A (6.7) kifejezés a felületi áramsűrűség felhasználásával [2] szerint a következőképpen írható fel:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV = \int_V q dV - \int_A \mathbf{j}^T \mathbf{dA}; \quad (6.8)$$

ahol:

**j** = **f c** (a legegyszerűbb esetben, ha egynemű folyadék áramlásáról van szó).

Az egyes megmaradási elvek vizsgálatakor az adott esetben jelentkező felületi áramsűrűséget a későbbiekben részletesen ismertetjük, itt csupán példaként említjük, hogy a felületegységre eső tömegáram a " **j** = **ρ c** " kifejezéssel adható meg. A Gauss-Osztrogradszkij integrál-átalakítási tétel segítségével a felületi áramsűrűség integrálja térfogati integrállá alakítható:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV = \int_V q dV - \int_V \nabla^T \mathbf{j} dV = \int_V q dV - \int_V \text{div} \mathbf{j} dV; \quad (6.9)$$

azaz:

$$\int_V \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla^T \mathbf{j} \right) dV = \int_V q dV; \quad (6.10)$$

A (6.10) egyenlet a **nyitott rendszerre** érvényes mérleg-egyenlet **integrál alakja**. A zárt rendszerrel kapcsolatban már megmutattuk, hogy a fenti típusú integrál pontosan akkor nulla, ha az integrálandó függvények összege nulla. Ennek alapján a nyitott rendszerre érvényes mérleg-egyenlet differenciálegyenlet formában felírt kifejezésének közismert alakját kapjuk:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla^T \mathbf{j} = q; \quad (6.11)$$

A felületi áramsűrűséggel kapcsolatban egy fontos megjegyzést kell tennünk. E jegyzetben csak egynemű folyadékok áramlástanával foglalkozunk, azonban több esetben (például a környezeti áramlások vizsgálatánál) több, különböző közeg együttes áramlásának vizsgálatára is sor kerülhet. A (6.7)-ből levezetett (6.10) vagy a (6.11) egyenlet alkalmas a különböző, fizikailag értelmezhető kölcsönhatások (pl. diffúzió) leírására. Ezt a bővítést az itt nem részletezett Onsager tétel illetve Onsager összefüggés alapján tehetjük meg.

A mérleg-egyenlet az alapul vett rendszertől függetlenül a fizikai megmaradást fejezi ki – ezért a kétféle alaknak (zárt, illetve nyitott rendszerre vonatkozó alak) ekvivalensnek kell lennie. Az anyagi, materiális vagy szubsztanciális derivált levezetésénél felírtuk a kapcsolati egyenletet, mely a zárt rendszerre és a nyitott rendszerre vonatkozó deriváltak közti kapcsolatot adja meg (2.25 vagy 2.26). E kapcsolati egyenlet segítségével bemutathatjuk a mérleg-egyenlet zárt és nyitott rendszerre felírt alakjának ekvivalenciáját.

Induljunk ki a (6.6) kifejezés kissé módosított alakjából (legyen a forrás a bal oldalon). Alakítsuk át a szubsztanciális derivált értékét (középső rész első tagja) a (2.25) szerint:

$$q = \frac{df}{dt} + f \nabla^T \mathbf{c} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}^T (\nabla f) + f \nabla^T \mathbf{c}; \quad (6.12)$$

A jobb oldalon szereplő második és harmadik tag egy szorzat-függvény divergenciája:

$$\mathbf{c}^T (\nabla f) + f \nabla^T \mathbf{c} = \nabla^T (f \mathbf{c}) = \text{div}(f \mathbf{c}) = \nabla^T \mathbf{j}; \quad (6.13)$$

Végeredményben tehát felírható (6.6) és (6.11) azonossága, azaz:

$$\frac{df}{dt} + f \nabla^T \mathbf{c} = q = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla^T (f \mathbf{c}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla^T \mathbf{j}; \quad (6.14)$$

Ezzel a differenciálegyenletek ekvivalenciáját megmutattuk, ebből az integrál egyenletek ekvivalenciája rögtön következik. Ez az egyenlőség - többek közt - azt fejezi ki, hogy a mérleg-egyenlet, illetve a belőle származó eredmény a választott rendszertől csak alakilag függ, megfelelő lépésekkel azonban ezen alakok ekvivalenciája bemutatható. Az egyenlőség azonban itt nem azonosság, csak ekvivalenciát fejez ki.

Összefoglalva, a mérleg egyenlet *nyitott* rendszerre vonatkozó, integrál alakja a következőképpen írható (a középső rész második tagját felületi integrállá alakítva írjuk fel):

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \int_A f(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \int_V q(\mathbf{r}, t) dV \quad (6.15)$$

ahol:

$f(\mathbf{r}, t)$ ; — skalár-vektor függvény (pl. a folyadék sűrűsége, stb.);

$\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{r}, t) dV$ ; — a vizsgált intenzív jellemző idő szerinti teljes, totális vagy szubsztanciális megváltozásainak integrálja;

$\int_V \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV$ ; — a vizsgált intenzív jellemző lokális vagy idő szerinti megváltozásainak integrálja (rögzített helyen);

$\int_A f(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}^T \mathbf{dA}$ ; — a vizsgált intenzív jellemző konvektív vagy hely szerinti megváltozásainak integrálja (rögzített pillanatban);

$\int_V q(\mathbf{r}, t) dV$ ; — a vizsgált térfogatban működő források hatása (integrálja).

(A  $\mathbf{c}^T$  szimbólum a sebesség transzponáltját jelenti, illetve a sebesség transzponáltja és az itt röviden vektornak jelölt felületelem – amely pontosabban a felületelem és a felület normál vektorának szorzata – skaláris vagy belső szorzatát jelöli.)

A Gauss-Ostrogradszkij tétel segítségével a mérleg – vagy transzport egyenlet (visszaalakított) integrál alakja a következő módon alakítható át úgy, hogy benne már csak térfogati integrálok szerepeljenek:

$$; \quad \frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(f(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}) dV = \int_V q(\mathbf{r}, t) dV \quad (6.16)$$

Mivel az integrálási tartomány a fent kimondott feltételeken túl tetszőleges, azért az integrálandó függvényeknek kell egyenlőnek lenni, ezzel a mérleg- vagy transzport-egyenletet *nyitott* rendszerre vonatkozó differenciálegyenlet alakjában kapjuk:

$$\frac{d f(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div}(f(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}) = q(\mathbf{r}, t); \quad (6.17)$$

Alapvető fontosság miatt külön kiírjuk a (6.17) tagjainak jelentését:

$f(\mathbf{r}, t)$ ; — skalár-vektor függvény (pl. a folyadék sűrűsége, stb.);

Továbbá:

$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t)$ ; — a vizsgált intenzív jellemző idő szerinti teljes, totális vagy szubsztanciális megváltozása;

$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ ; — a vizsgált intenzív jellemző lokális vagy idő szerinti megváltozása (rögzített helyen);

$\text{div}[f(\mathbf{r}, t)\mathbf{c}]$ ; — a vizsgált intenzív jellemző konvektív vagy hely szerinti megváltozása (rögzített pillanatban);

$q(\mathbf{r}, t)$ ; — a vizsgált térfogatban működő források.

A mérleg vagy transzport egyenlet tehát – legyen szó zárt, vagy nyitott, integrál vagy differenciálegyenletről – a megmaradási elvek általánosított formáját jelenti, és így közös alapja lesz az áramlástan alapegyenleteinek. De, természetesen a mérleg egyenlet jelentősége egyáltalán nem korlátozható az áramlástanra: adott esetben – hacsak a megmaradási elveket választjuk – minden, a környezetünkben végbemenő jelenségre alkalmazható.

A transzport vagy mérleg egyenlet olyan elméleti alap-egyenlet, melyre – e kurzus keretében – olyan elméleti kérdés irányulhat, amely szerint erről az alapról indulva levezetendő, valamely áramlástan alapegyenlet.

## 7. A fizika megmaradási elvei – az áramlásban

A fizika általunk vizsgált területét, az áramlást az anyag-, mozgásmennyiség-, energia- és a perdület megmaradás elvére építjük fel. Ezek alapos, korrekt ismerete tehát nélkülözhetetlen. Ez a korrekt ismeret a következő, négy elemből áll:

- a kérdéses egyenlet (matematikai alakjának) hibátlan ismerete;
- annak a megmaradási elvnek, illetve teljesülésének konkrét formájának ismerete, amelyre a szóban forgó egyenlet épül;
- az egyenlet tagjainak fizikai értelmezése – mi a fizikai jelentése az egyes tagoknak;
- a szóban forgó egyenlet érvényességi feltételeinek ismerete.

Az **anyag megmaradásának** elve (6.15) szerint írható fel, mindössze az általános „ $f$ ” függvény helyére a sűrűséget kell beírni:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \int_V q(\mathbf{r}, t) dV ; \quad (7.1)$$

A (7.1) egyenlet az anyag megmaradás elvén alapul és teljesen általános – vagyis nincs az érvényességét korlátozó, fizikai feltétel. Bal oldala a  $V$  térfogatban elhelyezkedő tömeg időbeli teljes megváltozását fejezi ki. Ezt felbontjuk a lokális változás (a választott térfogatbeli tömegváltozás) és konvektív változás (a választott térfogattól ki- és belépő tömegáramok összessége) összegére. A harmadik tag, a jobb oldal pedig azt mondja ki, hogy ez a megváltozás a keletkező vagy eltűnő anyag mennyiségével egyenlő. Ha olyan folyamatokat vizsgálunk, ahol nincs sem keletkező, sem eltűnő anyag ( $q(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ ), továbbá rögtön a teljes megváltozás lokális és konvektív összetevőre bontott alakját tekintjük, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = 0 ; \quad (7.2)$$

Ha a sűrűség az időben nem változik, akkor (7.2) bal oldali első tagja nulla lesz. Számoljunk továbbá átlagsebességekkel és legyenek ezek a választott felületekre merőlegesek – akkor egy áramcső ki ( $K$ ) és belépő ( $B$ ) felületére kapjuk:

$$\rho_B c_B A_B = \rho_K c_K A_K = \dot{m} = \text{áll.} \quad \text{vagy} \quad \rho = \text{áll.} \quad (\text{a hely szerint is!}) ; \quad (7.3)$$

$$c_B A_B = c_K A_K = \dot{V} = \text{áll.}$$

Ezek a folytonosság törvényének jól ismert és általánosan használt alakjai, illetve ezek integrál egyenletek.

A folytonosság törvényét differenciál-egyenletként is felírhatjuk:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(\rho \mathbf{c}) dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{c}) = 0 ; \quad (7.4)$$

Fizikai szempontból a lokális tag a választott térfogatbeli tömegváltozást, vagy a differenciál egyenletnél az egységnyi térfogatbeli tömegváltozást jelenti. A konvektív tag pedig ki- illetve belépő tömegeket határoz meg, differenciálegyenlet esetén az egységnyi térfogatot véve alapul. A folytonosság törvényének legfontosabb érvényességi feltétele a (7.2) kifejezéstől kezdődően az, hogy az áramlásban ne legyen sem forrás, sem nyelő. Ez egyébiránt a folytonosság törvényének **nyitott rendszerre** vonatkozó alakja.

A nyitott rendszerre vonatkozó differenciálegyenlet (6.11) alapján rögtön is felírható. Az érdekesség kedvéért megmutatjuk, hogy a folytonosság törvényének **zárt rendszerre** vonatkozó differenciál-egyenlete (6.6) szerint írható fel:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla^T \mathbf{c} = q; \quad (7.5)$$

A **mozgásmennyiség megmaradásának** elve szintén (6.15) szerint írható fel. Egy test mozgásmennyisége tömegének és sebességének szorzatával egyenlő. A mozgásmennyiség a tömeghez hasonlóan megmaradó extenzív mennyiség, megváltozása impulzus hatására következik be – az impulzust pedig a testre ható külső erő és hatásidejének szorzataként számítjuk. Folyadékok esetében a szóban forgó testet valamely, folyadékhoz kötött, egyszeresen összefüggő térfogattal határozhatjuk meg, ennek mozgásmennyisége:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \int_V \rho \mathbf{c} dV; \text{ és: } \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = \Sigma \mathbf{F}; \quad (7.6)$$

Mivel a mozgásmennyiség (szemmel láthatóan) vektor, ezért a három összetevőre felírt mérleg egyenletet összefogva a következőt írhatjuk:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho \mathbf{c}}{\partial t} dV + \int_A \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \Sigma \mathbf{F} \quad (7.7)$$

Vagyis a mozgásmennyiség időegységre eső teljes megváltozása – ami a lokális és konvektív változás összegeként írható fel – egyenlő a kiválasztott  $V$  térfogatbeli közegre ható külső erők eredőjével (összegével).

Az általunk vizsgált körben felületi és térfogati erők értelmezhetők. Ezen túl, véges térfogat esetén előfordulhat idegen test is a térfogatban (az ellenőrző felületen belül). Ezek szerint a külső erők a következőképpen írhatók:

$$\Sigma \mathbf{F} = \int_{(A)} \mathbf{\Pi} \mathbf{dA} + \int_V \rho \mathbf{g} dV + \mathbf{F} = \int_{(A)} \mathbf{\Pi} \mathbf{dA} + \int_V \rho \mathbf{g} dV - \mathbf{T}; \quad (7.8)$$

A fenti kifejezés jobb oldalának első tagja a felületi erő, a második tag a térfogati erő és a harmadik tag az első esetben az idegen test folyadéokra gyakorolt ereje ( $\mathbf{F}$ ), illetve a második esetben a testre gyakorolt erő ( $\mathbf{T}$ ), amely erő a folyadékra ható erő reakció ereje – ezt mutatja a negatív előjel. Ezen a helyen (is) hangsúlyozzuk, hogy egy vektor-mennyiség előjele mindig fizikai tartalmat hordoz: jelen esetben a  $\mathbf{T}$  előtti negatív előjel azt jelenti, hogy ez egy reakció erő.

Az úgynevezett „impulzus tétel” gyakorlati számításokra használatos alakja a (7.9) egyenlet. A bal oldalon a stacionárius, legfeljebb kvázi stacionárius áramlásokra érvényes, időegységre eső mozgásmennyiség változás konvektív része áll. A jobb oldalon az első két tag a felületi erőket jelenti. Ideális közegre a feszültség tenzor egyszerűen írható:  $\mathbf{\Pi}_{id} = -p \mathbf{E}$ , vagyis csak a nyomást tartalmazza. A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a felületi normális kifele, a nyomásból származó erő ezzel ellentétesen, befelé mutat – ez a felületi erők első tagja. A második tag ( $\mathbf{S}$ ) a súrlódásból származó erők összefoglaló formája. A harmadik, térfogati integrál a térfogati erőket jelenti – ez gyakran (de nem mindig) a nehézségi erő. A negyedik tag az ellenőrző felületen belül elhelyezkedő, idegen testre ható erő.

$$\int_{(A)} \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = - \int_{(A)} p \mathbf{dA} + \mathbf{S} + \int_V \rho \mathbf{g} dV - \mathbf{T}; \quad (7.9)$$

Az impulzus tételt igen gyakran ideális közegre írjuk fel, ebben az esetben az alábbi, igen gyakran használt alakot kapjuk:

$$\int_{(A)} \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = - \int_{(A)} p \mathbf{dA} + \int_V \rho \mathbf{g} dV - \mathbf{T} \quad (7.10)$$

Ez, a mozgásmennyiség megmaradására épülő integrál egyenlet, ami valójában a mozgásmennyiség megváltozásáról szól: a mozgásmennyiség annyit változik, amennyi változást a külső erők előidéznek. Érvényességi feltételei pedig a konkrét alakokkal kapcsolatosan a fentiekben olvashatók.

A mozgásmennyiség megmaradását zárt rendszerre is felírhatjuk. Ebben az esetben feltehető, hogy a külső erők nem változnak, csak a bal oldal változik. A (6.4) kifejezés alapul vételével a következő eredményt kapjuk:

$$\int_{V^*} \left[ \frac{d(\rho \mathbf{c})}{dt} + (\rho \mathbf{c}) \nabla^T \mathbf{c} \right] dV^* = \int_{V^*} \rho \mathbf{g} dV^* + \int_A \mathbf{\Pi} \mathbf{dA} - \mathbf{T}; \quad (7.11)$$

A mozgásmennyiség megmaradására épülő differenciálegyenlet, (7.7)-ből kiindulva nyerhető. (7.7) bal oldalát az idő szerint differenciálni kell. Mivel az integrálás és differenciálás sorrendje ez esetben felcserélhető, bal oldalt a következőképpen írhatjuk:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{c} dV = \int_V \mathbf{c} \frac{d}{dt} (\rho dV) + \int_V \frac{d\mathbf{c}}{dt} \rho dV = \int_V \frac{d\mathbf{c}}{dt} \rho dV; \quad (7.12)$$

;

ahol az anyagmegmaradás miatt:  $\int_V \mathbf{c} \frac{d}{dt} (\rho dV) = 0$ .

A (7.12) kifejezésben zárójelben külön kiírtuk a középső rész első tagját, ami az anyagmegmaradás elve alapján nullával egyenlő – így, végül a jobb oldalon álló végeredményre jutunk. Ez a jobb oldal lesz egyenlő (7.7) jobb oldalával, de az idegen test hatását elhagyjuk, hiszen az az elemi térfogatban nem lehet. A jobb oldalt – a már ismert módon – térfogati integrállá alakítva is felírtuk:

$$\int_V \frac{d\mathbf{c}}{dt} \rho dV = \int_{(A)} \mathbf{\Pi} \mathbf{dA} + \int_V \rho \mathbf{g} dV = \int_V (\text{div} \mathbf{\Pi} + \rho \mathbf{g}) dV; \quad (7.13)$$

Végeredményben, az integrálandó függvények egyenlőségéből következően az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{1}{\rho} \text{div} \mathbf{\Pi} + \mathbf{g}; \quad (7.14)$$

A (7.14) egyenlet elnevezése a legáltalánosabb esetben a **Navier-Stokes** egyenlet. Jelentése – a feszültség tenzor elemeitől függően – többféle lehet. A sűrűlódás tárgyalásánál visszatérünk majd erre a kérdésre, itt, az előzőhöz hasonlóan, csak az ideális folyadék esetére felírt **Euler** egyenletet mutatjuk be:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}; \quad (7.15)$$

Megjegyzendő, hogy a sebesség azonosan nulla választása esetén (7.15)-ből a hidrosztatika alap differenciál-egyenletét kapjuk. Az Euler egyenlet bal oldalán a teljes vagy totális gyorsulást felbonthatjuk a lokális és a konvektív gyorsulás összegére. Ezt részletesebben a kinematikával foglalkozó részben már bemutattuk. Az egyenlet részletesen:



$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot} \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{g}; \quad (7.16)$$

Az Euler egyenlet, az impulzus tételhez hasonlóan a mozgásmennyiség megmaradás elvére épül, és azt fejezi ki, hogy a mozgásmennyiség időegységre eső megváltozása a külső erők eredőjével egyenlő. Ez az időegységre eső mozgásmennyiség változás konkrétan, a (7.16) bal oldalán a teljes, totális vagy szubsztanciális gyorsulás, ennek felbontása látható (7.16) középső részében. A jobb oldal első tagja az egységnyi tömegre ható felületi erő, ami a nyomásváltozáson, nyomáskülönbségen alapul. A második tag az erők eredő térerősségéből származó, szintén egységnyi tömegre ható térfogati erő összege. Ez, nagyon egyszerűen a középiskolából ismert, Newton II. törvényét jelenti, ami szerint: " $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ ".

Az Euler egyenlet legfontosabb érvényességi feltétele az, hogy ideális folyadéokra vonatkozik.

Az 5. pontban bevezettük a kíséző triéder fogalmát, illetve meghatároztuk az ott értelmezhető konvektív gyorsulásokat – (5.6) és (5.7) kifejezés. A szintén ott bevezetett, stacionaritási feltétel mellett az Euler egyenlet érintő, illetve a normálvektor irányába a következőképpen írható fel:

$$c \frac{\partial c}{\partial e} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e} + g_e; \quad \text{és} \quad -\frac{c^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g_n; \quad (7.17)$$

A (7.17) kifejezés első tagja az érintő irányban, második tagja a normálvektor irányában felírt Euler egyenlet. Az egyenletekben szereplő  $g_e$  és  $g_n$  az eredő térerősség érintő, illetve normál irányú összetevője.

Az érintő irányú gyorsulás gyakran nulla, vagy elhanyagolható. Hasonlóképpen a térerősség is többször elhanyagolható. Ebben az esetben az Euler egyenlet, a kíséző triéderben felírva, a következő, gyakran használt alakban írható:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d p}{d r} = \frac{c^2}{r}; \quad (7.18)$$

Az Euler egyenletnek ez az igen egyszerű formája igen hasznos a nyomás változásának megítélésében, görbült áramvonalak esetében. A (7.18) differenciálegyenlet néhány, speciális feladat megoldásában is igen hasznosnak bizonyul.

A (7.16) egyenletet – vagyis az Euler egyenletet – egy áramlás két pontja között integrálva kapjuk az **energia megmaradás** elvére épülő Bernoulli egyenletet:

$$\int_1^2 \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T d\mathbf{s} + \left[ \frac{c^2}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 (\mathbf{c} \times \text{rot} \mathbf{c})^T d\mathbf{s} + [U]_1^2 + \int_1^2 \frac{d p}{\rho} - \int_1^2 \mathbf{g}_{II}^T d\mathbf{s} = 0; \quad (7.19)$$

A Bernoulli egyenlet – a levezetésnek megfelelően – egységnyi tömegre vonatkozik. Ezt a továbbiakhoz mindig hozzá kell érteni. A baloldal első tagja a választott két pont közötti, gyorsításra fordítandó munka, vagy a lassulásból származó munkavégző képesség. A második tag a választott pontok közötti mozgási energia különbség. A harmadik tag a forgatásra fordítandó munka, vagy a forgásból származó munkavégző képesség. A negyedik a potenciál különbség. Az ötödik a nyomásnövekedés ellenében végzendő munka, vagy a nyomáscsökkenésből származó munkavégző képesség. Végül a hatodik tag a nem-potenciális erők térerőssége ( $\mathbf{g}_{II}$ ) ellenében végzendő munka, vagy az abból származó munkavégző képesség.

A Bernoulli egyenlettel kapcsolatban két, nagyon fontos érvényességi feltételt kell kiemelni: a közeg csak ideális lehet – sűrűdésos áramlásra a fenti egyenlet nem alkalmazható és a két, választott pont között nem lehet energia be- vagy elvezetés. Ez utóbbi feltételt jeleníti meg számszerűen a (7.16) jobb oldalán álló nulla szám, másképpen fogalmazva: e nullának a fizikai jelentése az, hogy nem lehet energia be- vagy elvezetés. (A választott két pont között nem lehet energiaforrás, vagy energia-nyelő.)

Az összenyomható közegek áramlásakor az energia-egyenlet alábbi formáját használjuk:

$$\frac{c^2}{2} + c_p T = c_p T_0 = \text{áll.} \quad (7.20)$$

A (7.20) egyenletet – az általános gáztörvény, illetve az adiabatikus kitevőre ( $\kappa$ ) vonatkozó összefüggések alapján átírhatjuk egy másik, gyakran használatos formába:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \text{áll.} \quad (7.21)$$

$$\text{mert : } c_p T = c_p \frac{p}{\rho R}; \quad c_p = \kappa c_v \quad \text{és} \quad R = c_p - c_v;$$

$$\text{ezért : } c_p T = c_p \frac{p}{\rho R} = \frac{c_v \kappa}{c_v (\kappa-1)} \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho};$$

A 14. pontban vezetjük majd be a hangsebességet (jele:  $a$ ). A (7.21)-et, figyelembe véve (14.4)-et a következő formában is felírhatjuk:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1} = \frac{a_0^2}{\kappa-1} = \text{áll.} \quad \text{ahol : } a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = (\text{izentrópiikus esetben}) = \sqrt{\kappa RT}; \quad (7.22)$$

$$\text{tehát : } a^2 = \kappa RT = \kappa \frac{p}{\rho} \quad \text{és} \quad a_0^2 = \kappa RT_0 = \kappa \frac{p_0}{\rho_0};$$

Ezek az egyenletek azt mondják ki, hogy az (egységnyi tömeg) kinetikai energiájának és entalpiájának ( $c_p T$ ) összege állandó és (mondjuk) a tartály entalpiával egyenlő. Az egymással ekvivalens egyenleteknek érvényességéhez – a (7.16) Bernoulli egyenletnél mondott érvényességi feltételeken túl (külön hangsúlyozva, hogy nem lehet energia be- vagy elvezetés) a potenciálváltozásnak és az örvényességgel kapcsolatos tagnak is vagy nullának, vagy elhanyagolhatóan kicsinek kell lenni. Hasonlóképpen nem lehet jelen nem-potenciális erőter és az instacioneritás sem engedhető meg.

A mérleg-egyenlet alapján, az **energia megmaradási** elvre építve a következő, ténylegesen **energia egyenletnek** nevezett **integrál egyenlet** vezethető be.

Az energia megmaradásának vizsgálatánál az egységnyi tömegről vonatkoztatott, teljes energiát vizsgáljuk, ez az energia a rendezett mozgásból származó kinetikai és a rendezetlen (hő)mozgásból származó energia összege. A hőmozgásból származó energiát belső energiának nevezzük. Az energia-megmaradás felírásakor az "  $f$  " extenzív mennyiség sűrűség függvénye az egységnyi térfogat teljes energiája:

$$f = \rho \left( u + \frac{c^2}{2} \right) = \rho e; \quad (7.23)$$

ahol:  $\rho$  - a sűrűség;

$u$  - egységnyi tömeg belső energiája;

$c^2/2$  - egységnyi tömeg mozgási (kinetikai) energiája;  
 $e = u + c^2/2$  - egységnyi tömeg teljes energiája.

Az energia megmaradását is, az eddigiekhez hasonlóan az idő szerinti megváltozásának segítségével vizsgáljuk. Így a kiinduló egyenletben időegységre vonatkoztatott energia változás, azaz teljesítmény lesz. A **nyitott rendszerre** vonatkozó kifejezést a (6.10) mérleg egyenlet alapján írhatjuk fel. Írjuk az ott példaként szereplő tömegáram helyére az energia-áramot ( $\mathbf{j} = e\mathbf{c}$ ); a jobb oldalra pedig az időegységre vonatkoztatott energiaforrásokat kell írni:

$$\int_V \rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla^T (e \mathbf{c}) \right) dV = \int_V q dV ; \quad (7.24)$$

Vizsgáljuk meg a (7.24) jobb oldalán álló kifejezést, ami a különböző teljesítmény források összege. Ezek, természetesen, nem csak források, hanem nyelők is lehetnek. Energiaforrás (nyelő), azaz a folyadékra irányuló, külső teljesítmény többféle lehet. Ezek részben az erőkkel, részben a hő különböző formáival kapcsolatosak.

Tekintsük először a mozgásmennyiség változás forrását, a felületi és térfogati erőket. Általában az erő és a sebesség szorzata szolgáltatja a keresett teljesítményt. A felületi erőket a feszültség tenzor és egy felület szorzataként kapjuk meg. Szorozzuk ezt a folyadék sebességével. A feszültség tenzor szimmetrikus, ezért a szorzótényezőket felcserélhetjük, illetve csoportosíthatjuk:

$$P_F = \int_A \mathbf{c}^T (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{dA}) = \int_A (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{c}) \mathbf{dA} = \int_V \text{div}(\boldsymbol{\Pi} \mathbf{c}) dV ; \quad (7.25)$$

Ezt a tagot, vagy ennek a tagnak egy részét a szakirodalom "disszipáció"-nak nevezi. A következő tagot, az erők térerősségének teljesítményét hasonló módon írhatjuk fel:

$$P_T = \int_V (\rho \mathbf{g}^T \mathbf{c}) dV ; \quad (7.26)$$

Egy rendszerben, ha létezik hőmérséklet különbség, akkor létezik hő-áram is, ennek általános kifejezése (a hőtan tanítása szerint) a kiválasztott folyadékot határoló "A" felületre:

$$Q_V = \int_A k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{dA} = \int_A k \mathbf{grad} T \mathbf{dA} = \int_V \text{div}(k \mathbf{grad} T) dV ; \quad (7.27)$$

ahol:  $k$  - a hővezetési tényező.

A hővezetésen túl még több hatás is létezik, például a hőszugárzás vagy kémiai reakciók hőfejlesztése, hőelvonása stb. Jelöljük a térfogati hőforrást általában " $\varepsilon$ "-nal. Ezzel a hőforrások hatása:

$$Q_F = \int_V \varepsilon dV ; \quad (7.28)$$

Ezzel felírható a nyitott rendszerre vonatkozó energia egyenlet integrálegyenlet formában:

$$\int_V \rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla^T (e \mathbf{c}) \right) dV = \int_V \{ \text{div}(\boldsymbol{\Pi} \mathbf{c}) + \rho \mathbf{g}^T \mathbf{c} + \text{div}(k \mathbf{grad} T) + \varepsilon \} dV ; \quad (7.29)$$

Az energia egyenlet differenciálegyenlet formában történő felírásához, a hagyományos alak levezetése érdekében tekintsük először az alábbi kifejezést:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \rho \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} - e \frac{\partial \rho}{\partial t}; \quad (7.30)$$

illetve:

$$\begin{aligned} \nabla^T(\rho e \mathbf{c}) &= e \nabla^T(\rho \mathbf{c}) + \rho \nabla^T(e \mathbf{c}) \Rightarrow \rho \nabla^T(e \mathbf{c}) = \\ &= \nabla^T(\rho e \mathbf{c}) - e \nabla^T(\rho \mathbf{c}); \end{aligned} \quad (7.31)$$

ezzel:

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla^T(e \mathbf{c}) \right) = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla^T(\rho e \mathbf{c}) - e \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^T(\rho \mathbf{c}) \right\}; \quad (7.32)$$

A (7.32) egyenlet jobb oldalán, a kapcsos zárójelben éppen a folytonosság törvénye áll, ami anyagi forrás-mentes áramlás esetén nulla. Így az energia-megmaradást kifejező, nyitott rendszerre vonatkozó differenciálegyenlet a következő lesz:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{c}) = \operatorname{div}(\mathbf{\Pi} \mathbf{c}) + \rho \mathbf{g}^T \mathbf{c} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \varepsilon; \quad (7.33)$$

A (7.29), illetve (7.33) egyenletből világosan kitűnik a hőtan és az áramlásban kapcsolata. Azokban az esetekben, amikor szükség van az energia egyenletre, illetve amikor a hőmérséklet változása lényeges (pl. összenyomható közegek áramlása esetén) mindkét tudományterület eredményeit figyelembe kell venni.

A **perdület megmaradás** elvére épülő alap-egyenlethez úgy jutunk el, ha a mozgásmennyiség megmaradására épülő, (7.9) egyenlet minden tagját balról vektoriálisan szorozzuk „ $\mathbf{r}$ ”-rel (az „ $\mathbf{r}$ ” az általunk választott koordináta rendszer origójától az integrálásban szereplő pontig tartó helyvektor):

$$\int_{(A)} \mathbf{r} \times (\mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA}) = - \int_{(A)} \mathbf{r} \times (p \mathbf{dA}) + \mathbf{r} \times \mathbf{S} + \int_V \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{g} dV) - \mathbf{r} \times \mathbf{T} \quad (7.34)$$

A baloldalon az időegységre eső perdület-változás található – ez a kiválasztott ellenőrző felületben elhelyezkedő közegre ható, eredő, külső nyomatékkal egyenlő. A jobb oldal első tagja a felületi erők nyomatéka. A (7.34) egyenlet jobb oldalán, a felületi erők nyomatékának számításánál a nyomás mellett, a teljesség kedvéért a súrlódó erők nyomatéka is helyett kapott ( $\mathbf{r} \times \mathbf{S}$ ). Az első és második tag együtt a teljes feszültség-tenzorral is felírható. A harmadik tag a térfogati erők nyomatéka.

A negyedik tag a közeg által kifejtett, az esetleges idegen testre ható nyomaték – ezt jelzi (a 7.9 egyenletnél leírtakhoz hasonlóan) a negatív előjel. A (7.34) kifejezés, hasonlóan (7.9)-hez, csak stacionárius, vagy kvázi-stacionárius áramlásra igaz.

A perdület megmaradás elvére épülnek az örvény tételek, de ezekkel külön pontban foglalkozunk. Hasonlóképpen ide tartozik az örvény-transzport egyenlet is, ezzel az egyenlettel azonban e tárgy keretein belül nem tudunk foglalkozni.

Ugyancsak ennek az elvnek a felhasználásával vezethető le az Euler-turbina egyenlet. Ezt az egyenletet az áramlástan gépek működésének vizsgálatánál szokás használni, ezzel konkrétan a 19. fejezetben foglalkozunk.

A megmaradási elvekre épülő alapegyenletek megfogalmazása után kimondható az az állítás, amely szerint egy áramlásban feladatban minden megmaradási elvnek teljesülnie kell. Ha ez megvalósul, akkor a feladat beilleszthető a jelenleg általánosan elfogadott világképbe. Ha azonban nem teljesülne, akkor ez a jelen áramlásban (fizikai) tudásunk határain túlra mutató okoskodássá lenne: pillanatnyilag nem ismert olyan áramlástanban jelenség, amelyre ne vonatkoznának a megmaradási elveink.

(7.34) felírási módjából (is) következik, hogy a perdület megmaradásra épülő vektor egyenlet alternatívája a mozgásmennyiség megmaradásra épülő szintén vektor egyenletnek – vagyis egy feladat megoldásában célszerűen vagy az egyik, vagy a másik alkalmazandó, mivel ezek az egyenletek egymással összefüggenek.

A fentiek tudatában, az áramlásban gyakran használnak ún. „kinematikailag lehetséges” áramlásokat: ezekre alapvetően csak a folytonosság törvényének teljesülését írjuk elő. Példaként említjük, hogy olyan síkáramlásokban, amelyek nullmértékű halmaztól eltekintve örvénymentesek, használhatók a komplex potenciálok (9. fejezet). Ezek az áramlások – megfelelően alkalmazva őket – jól használható, fontos gyakorlati eredményekhez vezetnek. Azonban, meg nem engedett módon használva őket, súlyos fizikai tévedésekhez is vezethetnek.

## 7.1 Az áramlástan feladatok – modern – matematikai modellje

Az áramlástan feladatok matematikai modelljét a megfelelő megmaradási elvek alapján felírt integrál- vagy differenciálegyenletek és két kiegészítő egyenlet felhasználásával írhatjuk fel.

Tekintsünk egy tetszőleges áramlást és számoljuk össze az ezt leíró független változókat. Ebben a közelítésben számoljunk (a turbulens sebesség-ingadozásokat is beleértve) a teljes sebességgel. A független változók: a sűrűség, a sebesség (három komponenssel), a nyomás, a hőmérséklet és a belső energia, vagyis összesen 7 független változó. Ezek szerint 7 egyenlet szükséges és elégséges a folyadékmozgások leírásához. Ezek pedig - általában - a következők:

folytonosság törvénye $\Rightarrow$	1 (skalár) egyenlet;
mozgásmennyiség megmaradása $\Rightarrow$	1 vektor egyenlet = 3 (skalár) egyenlet;
energia megmaradása $\Rightarrow$	1 (skalár) egyenlet;
állapot egyenlet $\Rightarrow$	1 (skalár) egyenlet;
kapcsolati egyenlet $\Rightarrow$	1 (skalár) egyenlet;

Az állapot egyenlet a hőtán területéről származik, és a vizsgált folyadék állapotjelzői (nyomás, hőmérséklet, sűrűség) közti kapcsolatot írja le. Az állapot egyenletekkel részletesen a hőtán jegyzet foglalkozik. Írjuk fel a legegyszerűbb, általános gáztörvényt:

$$p = \rho R T ; \quad (7.35)$$

A kapcsolati egyenlet – szintén a hőtán területéről származik – a hőmérséklet és a belső energia közötti kapcsolatot írja le, a legegyszerűbb esetben, amikor az állandó térfogaton vett fajhő ( $c_v$ ) értéke állandó:

$$u = c_v T ; \quad (7.36)$$

A következőkben az áramlásban alap-egyenleteit foglaljuk össze. Ezeket az egyenleteket a legáltalánosabb alakjukban írjuk fel – azaz itt helyet kap pl. a súrlódás is – de erre a felírára éppen az általánosság miatt szükség is van.

Néhány esetben bemutattuk már, hogy egy-egy egyenlet zárt-, illetve nyitott rendszerre is felírható. A következőkben minden differenciál-egyenlet mindkét alakját felírjuk, és a nyitott rendszerre vonatkozó alakot **konzervatív alak**nak nevezzük.

A **konzervatív alak** azt hivatott kifejezni, hogy az itt szereplő változók megőrzik a folytonosságukat akkor is, amikor az un. primitív változók (pl. nyomás, sebesség stb.) ugrásszerűen változnak. Egy fizikai példa: egy lökéshullám esetében a lökéshullámra merőleges sebesség összetevő ugrásszerűen változik, a mozgásmennyiség megfelelő összetevője azonban folytonos marad. Ez részben kifejezi azt, hogy a mozgásmennyiség (pl. „ $\rho \mathbf{c}$ ”) magmaradó típusú mennyiség, részben azt is kifejezi, hogy a sűrűség-ugrás és a sebesség-ugrás egymást kiegyenlítő módon áll elő.

A **nem konzervatív alak** igazából csak azt fejezi ki, hogy ezekben az egyenletekben a fent leírt folytonosság nem (mindig) áll fenn. A **nem konzervatív alakú** egyenletek a zárt rendszerre felírt megmaradási elvekből származtathatók, és bennük a független változók a „primitív”-nek nevezett változók (pl. nyomás, sebesség összetevők stb.). A következőkben rendre felírjuk az egyes megmaradási elveknek megfelelő differenciálegyenleteket:

Folytonosság:

Konzervatív alak:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{c}) = 0; \quad (7.37)$$

Nem konzervatív alak:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{c}) = 0; \quad (7.38)$$

Mozgásmennyiség megmaradása:

Konzervatív alak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho c_x)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c_x \mathbf{c}) &= \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}; \\ \frac{\partial(\rho c_y)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c_y \mathbf{c}) &= \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}; \\ \frac{\partial(\rho c_z)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c_z \mathbf{c}) &= \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}; \end{aligned} \quad (7.39)$$

Nem konzervatív alak:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dc_x}{dt} &= \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}; \\ \rho \frac{dc_y}{dt} &= \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}; \\ \rho \frac{dc_z}{dt} &= \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}; \end{aligned} \quad (7.40)$$

A mozgásmennyiség megmaradás elvére alapozott egyenleteket részletezve írtuk ki. Ennek több oka van, de a legfontosabb az, hogy a részletes kiírás jobban megmutatja a teljes egyenletet.

Energia-megmaradás:

Konzervatív alak:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla^T(\rho e \mathbf{c}) = \text{div}(\mathbf{\Pi} \mathbf{c}) + \rho \mathbf{g}^T \mathbf{c} + \text{div}(k \text{grad} T) + \varepsilon ; \quad (7.41)$$

Nem konzervatív alak:

$$\rho \frac{de}{dt} = \text{div}(\mathbf{\Pi} \mathbf{c}) + \rho \mathbf{g}^T \mathbf{c} + \text{div}(k \text{grad} T) + \varepsilon ; \quad (7.42)$$

Ezen egyenletek segítségével a folyadékok áramlása vizsgálható. Ezek az egyenletek a napjainkban rohamosan terjedő, numerikus számolási eljárások egy lehetséges alap-rendszerét képezik. Amennyiben a tényleges sebességek helyett átlagsebességgel számolnánk, úgy a fenti rendszer kiegészítendő lenne valamely turbulencia modellel. Ezzel részletesebben csak a vonatkozó szakirodalom foglalkozik.

Az áramlástan feladatokat leíró, konzervatív alakú differenciál-egyenleteket szokás összefoglaló módon is felírni. Ennek érdekében vezessük be a következő vektorokat:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho c_x \\ \rho c_y \\ \rho c_z \\ \rho e \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho c_x \\ \rho c_x^2 - \sigma_{xx} \\ \rho c_y c_x - \tau_{xy} \\ \rho c_z c_x - \tau_{xz} \\ \rho e c_x - k \frac{\partial T}{\partial x} - c_x \sigma_{xx} - c_y \tau_{xy} - c_z \tau_{xz} \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho c_y \\ \rho c_x c_y - \tau_{yx} \\ \rho c_y^2 - \sigma_{yy} \\ \rho c_z c_y - \tau_{yz} \\ \rho e c_y - k \frac{\partial T}{\partial y} - c_x \tau_{yx} - c_y \sigma_{yy} - c_z \tau_{yz} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho c_z \\ \rho c_x c_z - \tau_{zx} \\ \rho c_y c_z - \tau_{zy} \\ \rho c_z^2 - \sigma_{zz} \\ \rho e c_z - k \frac{\partial T}{\partial z} - c_x \tau_{zx} - c_y \tau_{zy} - c_z \sigma_{zz} \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \\ \rho(c_x g_x + c_y g_y + c_z g_z) \end{bmatrix} ;$$

Ezeknek a vektoroknak a segítségével az áramlástan alap-egyenleteket – ezek között nem szerepel az állapot egyenlet és a kapcsolati egyenlet – igen tömör formában lehet felírni:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{J} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} ; \quad (7.43)$$

A (7.43) egyenlet tagjainál a deriválást az egyes komponenseken értelemszerűen elvégezve megkapjuk a folytonosság, a mozgás-mennyiség-megmaradás és az energia-megmaradás megfelelő, **konzervatív alakú** differenciálegyenleteit. A (7.43) tehát egy tömör alak, ami több tekintetben is segíti a további munkát. Lényegében ez a numerikus feladatok egyik kiindulási pontja. Csak megjegyezzük, hogy az újabb angol szakirodalom – meglehetősen pongyola módon – ezt nevezi Navier-Stokes egyenletnek.

A (7.43) általános egyenletből egyszerűen származtathatók a speciális esetek:

- stacionárius áramlás esetén kimarad az "**U**";
- síkáramlás esetén kimarad pl. a "**H**";
- stacionárius síkáramlás esetén kimarad az "**U**" és a "**H**";
- súrlódásos de lamináris áramlás esetén a  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$ ;
- ideális közeg esetén érvényes a  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$  és a csúsztató feszültség értékek azonosan nullák.

A (7.43) egyes tagjait, a fizikai tartalmuk szerint szokás elnevezni. Így az "**U**"-t fluxus- vagy ismeretlen-vektornak nevezik, a "**J**"-t forrás-tagnak nevezik és az "**F**", "**G**" valamint a "**H**" a konvektív fluxusnak nevezett tagok. Ez a tömör alak nagy segítséget nyújthat a differenciálegyenletek osztályba sorolásában és az egyes tagok tulajdonságainak, viselkedésének vizsgálatában.

Nagyon fontos szem előtt tartani azt, hogy a (7.43) egyenletben, általános esetben (amikor az áramlás turbulens is lehet), számos további derivált szerepel és a feszültségek számítása, amennyiben átlag-sebességekkel dolgozunk további egyenleteket követel.

A (7.43) egyenlettől szokás kiindulni akkor is, amikor a megoldandó feladatot a tényleges, fizikai tartományból valamilyen transzformációval egy számítási tartományra képezzük le. Ennek az eljárásnak az az előnye, hogy az eredetileg bonyolult alakú tartományt egyszerű alakra transzformáljuk, így a numerikus megoldás számos problémája lényegesen egyszerűsödik. Hátránya viszont, hogy a leképezéssel – általában – megváltozik a metrika, azaz az új tartományban a hossz és szögmérés más lesz, miáltal a differenciálegyenletek alakja is jelentősen megváltozik. A leképezésektől általában megköveteljük a kölcsönös egyértelműséget (bijektivitás) és törekszünk arra, hogy az új tartományban is lehetőleg ortogonális rendszert építsünk fel.

E pont lezárásaként megemlítjük, hogy napjainkra több, kipróbált numerikus algoritmust alakítottak ki, ilyen például a SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations), a SIMPLER, a SIMPLEC és a PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) módszer - ezeket részletesen a vonatkozó szakirodalom tartalmazza.

## Mintafeladatok

A megmaradási elvek igen fontos elméleti alap-kérdések. Egy áramlásban kurzus esetében tipikusnak tekinthető az alábbi néhány alapkérdés:

Írja fel az impulzus tételt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen megmaradási elvet és hogyan fejez ki ez az egyenlet! Határozza meg minden egyes tag fizikai jelentését! Melyek az egyenlet legfontosabb érvényességi feltételei?



Írja fel a mozgásmennyiség megmaradásán alapuló differenciál-egyenletet. Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen megmaradási elvet és hogyan fejez ki ez az egyenlet! Határozza meg minden egyes tag fizikai jelentését! Melyek az egyenlet legfontosabb érvényességi feltételei?

Írja fel a folytonosság törvényének differenciálegyenlet és integrálegyenlet alakját! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen megmaradási elvet és hogyan fejez ki ez az egyenlet! Határozza meg minden egyes tag fizikai jelentését! Melyek az egyenletek legfontosabb érvényességi feltételei? – (.....és még több, hasonló jellegű kérdés.)

E a feladatok a konkrét megoldását külön nem ismertetjük, hiszen a feltett kérdésekre adandó válasz a korábbi anyagban olvasható – a feladat legfeljebb a válasz elemeinek összegyűjtése lehet. Gyakorlati feladatokat később ismertetünk.

## 8. Hidrostatika

A folyadékokra, illetve gázokra vonatkozó legegyszerűbb feladat az, amikor, alkalmasan választott koordináta rendszerből nézve a közeg nyugalomban van. Ekkor hidrostatika feladatról beszélünk. A hidrostatika alap differenciál egyenletét az Euler egyenletből (7.15) kaphatjuk, úgy, hogy a sebességet és a gyorsulást is azonosan nullának választjuk:

$$\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{g}; \quad (8.1)$$

Ez a differenciálegyenlet hasznos az elméleti megfontolások megtételében, illetve a változó sűrűségű közegekre vonatkozó feladatok megoldásában is. Az egyenlet a mozgásmennyiség megmaradás elvén alapul, közvetlenül azt mondja ki, hogy az egységnyi térfogatra ható, nyomásváltozásból illetve térerőből származó erő egyensúlyban van. Az általunk vizsgált minden hidrostatika feladatra érvényes.

Képezzük (8.1) mindkét oldalának rotációját:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} p) = 0 = (\mathbf{grad} \rho) \times \mathbf{g} + \rho (\mathbf{rot} \mathbf{g}); \quad (8.2)$$

A (2.8) egyenlet értelmében a baloldal rotációja nulla. Amennyiben a sűrűség állandó ( $\rho = \text{áll.}$ ), akkor azt kapjuk, hogy a térerősség rotációjának is nullának kell lennie. Ez pedig azt jelenti, hogy a szóban forgó erőter csak potenciális lehet (3. pont), illetve, hogy állandó sűrűségű közeg csak potenciális erőterben lehet nyugalomban.

Tegyük fel, hogy az erőter vagy erőterek potenciálisak. Integráljuk (8.1) mindkét oldalát:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \int_1^2 dU = 0 \quad (\text{itt: } \mathbf{g} = -\mathbf{grad} U); \quad (8.3)$$

Ezzel a hidrostatika alap integrál egyenletének azt az alakját kapjuk, amely változó sűrűségű közeg esetén alkalmazható, akkor, ha a sűrűség kifejezhető a nyomás függvényeként.

Tegyük fel, hogy a közeg sűrűsége állandó. Integráljuk ismét (8.1) mindkét oldalát:

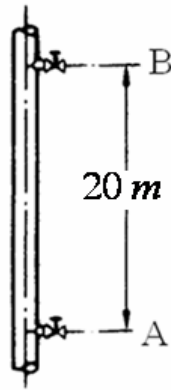
$$p = -\rho U + \text{áll.} \quad (\text{itt: } \mathbf{g} = -\mathbf{grad} U); \quad (8.4)$$

Ezzel a hidrostatika integrált alap-egyenletéhez jutunk. Igaz, hogy ez az egyenlet csak a fenti feltételek esetében alkalmazható, de azért az áramlástan oktatásában alkalmazott, gyakorlati feladatok igen nagy részét ennek az egyenletnek a segítségével kell és lehet megoldani.

A hidrostatika alapvető jelentőségű terület, számos, erre a területre vonatkozó, megoldott feladat található [7] példatár 11. „Hidrostatika” című fejezetében. A következőkben, bevezető segítségként két mintafeladatot oldunk meg.

### Mintafeladatok

**Feladat:** tekintsük a 8.1 ábrán látható, földi nehézségi erőterben elhelyezkedő függőleges gázcső-darabot:

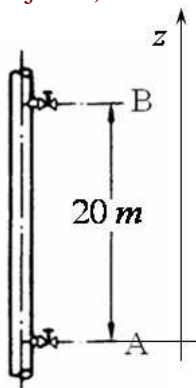


8.1. ábra – Függőleges gázvezeték darab

A cső belsejében lévő gáz sűrűsége  $\rho_G = 0.7 \text{ kg/m}^3$ . Kívül  $\rho_L = 1.225 \text{ kg/m}^3$  sűrűségű levegő helyezkedik el. Az „A” pontban a gáz túlnyomása  $500 \text{ N/m}^2$ . Kérdés, hogy mekkora a gáz túlnyomása a „B” pontban?

Megállapítható, hogy ez a feladat állandó sűrűségű közegre vonatkozó, hidrosztatika feladat. Ezért célszerűen (8.4) felhasználásával oldható meg.

A hidrosztatika feladatokban első lépésként alkalmas koordináta rendszert kell választani (rendeljük a „ $z=0$ ” értéket az „A” pont szintjéhez):



8.2. ábra – Koordináta rendszer definiálása

Írjuk fel ebben a koordináta rendszerben a nehézségi erőter potenciálját:

$$U = g z ;$$

Írjuk fel (8.4)-et a levegőre:

$$p_L(z) = -\rho_L g z + p_{LA}; \quad (\text{ahol } p_{LA} \text{ a levegő nyomása az "A" pontban})$$

Írjuk fel (8.4)-et a gázra is:

$$p_G(z) = -\rho_G g z + p_{GA}; \quad (\text{ahol } p_{GA} \text{ a gáz nyomása az "A" pontban})$$

A feladat feltételeiből tudjuk, hogy:

$$p_G(z=0) = p_{GA} \text{ és } p_L(z=0) = p_{LA}; \quad (8.5)$$

$$\text{különbsége: } p_{GA} - p_{LA} = 500 \text{ N/m}^2;$$

Ezek szerint a gázra vonatkozó egyenletből kivonva a levegőre vonatkozó egyenletet, azt kapjuk, hogy:

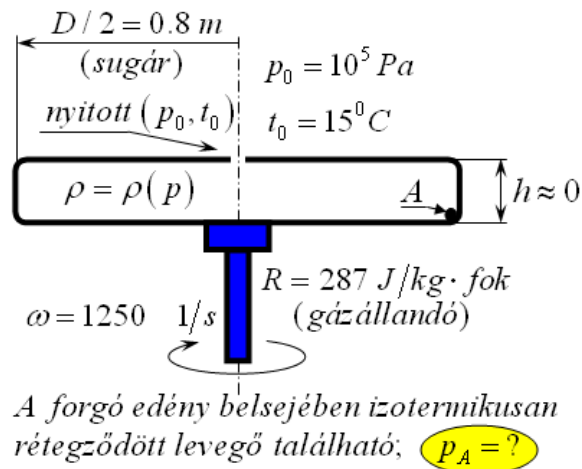
$$p_G(z) - p_L(z) = -(\rho_G - \rho_L)gz + (p_{GA} - p_{LA}); \quad (8.6)$$

Helyettesítsük be a megfelelő számértékeket:

$$p_G(20) - p_L(20) = (1.225 - 0.7) \cdot 9.81 \cdot 20 + 500 \cong 603 \text{ N/m}^2; \quad (8.7)$$

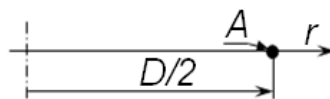
A számításunk alapján arra az érdekes és a gyakorlatban is igen fontos eredményre jutottunk, hogy a gáz túlnyomása a magasság növekedésével növekszik. Ezt a tényt a gázvezetékek karbantartásánál például feltétlenül figyelembe veszik.

Feladat: tekintsük a 8.3 ábrán látható, elhanyagolható magasságú, forgó edényt:



8.3. ábra – Nyomászámítás forgó edény belsejében

Vegyük észre, hogy az edényhez rögzített, együttforgó koordináta rendszerben ez hidrosztatika feladat. Ezért, koordináta rendszerként elegendő lesz egy, a forgástengelytől induló „ $r$ ” tengely felvétele:



Megoldás: vegyük észre azt, hogy a lényegében nulla magasság miatt a nehézségi erőter hatása elhanyagolható. További fontos információ az, hogy a sűrűség változik (pontosan ezért, a változó sűrűséggel történő számolás miatt választottuk ezt a bemutató feladatot); méghozzá ez a változás izotermikus, vagyis a sűrűség csak a nyomás függvénye!

Válasszuk a fentiekben már meghatározott együttforgó koordináta rendszert. Ebben a rendszerben a potenciál és teljes differenciálja:

$$U(r) = -\frac{r^2 \omega^2}{2}; \quad \text{illetve} \quad dU = \frac{dU}{dr} dr = -r \omega^2 dr; \quad (8.8)$$

Válasszuk a megoldáshoz (8.3)-at, ((8.1) potenciálos erőterek és változó sűrűség esetében érvényes, integrált alakját):

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \int_1^2 dU = 0; \quad (8.9)$$

A fenti egyenlet alkalmazásához szükséges a sűrűség, mint a nyomás függvénye:

$$\frac{p}{\rho} = RT \text{ és } \frac{p_0}{\rho_0} = RT_0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{p}$$

$$\text{és } \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{10^5}{287 \cdot 288} \cong 1.21 \text{ kg/m}^3; \quad (8.10)$$

Helyettesítsük be (8.9)-be (8.10) megfelelő részét:

$$\frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^{p_A} \frac{dp}{p} - \int_0^{D/2} r \omega^2 dr = 0 \Rightarrow \frac{p_0}{\rho_0} \ln \left( \frac{p_A}{p_0} \right) = \frac{(D/2)^2 \omega^2}{2}; \quad (8.11)$$

Innen a keresett nyomás már kifejezhető:

$$p_A = p_0 \exp \left[ \frac{\rho_0 (D/2)^2 \omega^2}{p_0} \right] = 10^5 \exp \left( \frac{1.21 \cdot 0.8^2 \cdot 1250^2}{10^5} \right) =$$

$$\cong 4.24 \cdot 10^7 \text{ Pa}; \quad (8.12)$$

A végeredmény azt (is) mutatja, hogy a centrifugális erőtérben meglehetősen nagy nyomás-növekedés érhető el, ennek a ténynek a gyakorlati jelentősége nagy (pl. ultra-centrifuga működése).

Az áramlástan feladatok megoldásánál számtalan hidrosztatika részfeladat fordul elő, ezekre a részfeladatokra általában, a feladatmegoldás során érdemes odafigyelni és tudatosítani, hogy pl. egy „U” csöves manométer által mutatott nyomás meghatározásakor – esetleg – hidrosztatika feladatot oldunk meg.

A példatárakban sok, hidrosztatika feladat található, javasoljuk például a [7] 11. fejezetében található feladatainak megoldását.

## 9. Komplex potenciálok

A korábbiakban már rámutattunk a skalár potenciál létezésének szükséges és elégséges feltételére. Ez az állandó sűrűségű közeg sebességével kapcsolatban, időálló áramlásra a következő módon fogalmazható meg:

$$\exists \varphi = \varphi(\mathbf{r}): \mathbf{c} = \mathbf{grad} \varphi \Leftrightarrow \mathbf{rot} \mathbf{c} \equiv \mathbf{0}; \quad (9.1)$$

Vagyis, ha a sebességtér rotációja – nullmértékű halmaztól eltekintve – azonosan nulla, akkor találhatunk olyan skalár-vektor függvényt, amelynek a sebesség a gradiense. A nullmértékű halmaz – például síkáramlás esetén – nulla területet jelent, vagyis a sebesség rotációja legfeljebb nulla területű vonalakon lehet nullától különböző. Ez a megjegyzés a szingularitások bevezetése és alkalmazása miatt fontos.

A folytonosság törvényének (7.4) szerinti, állandó sűrűségű közegre vonatkoztatott alakjából, egyszerű számolással következik:

$$\mathit{div} \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathit{div}(\mathbf{grad} \varphi) = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0; \quad (9.2)$$

(9.2) a sebességi potenciál meghatározására alkalmas, másodrendű, lineáris, elliptikus típusú parciális differenciál-egyenlet. Még ebben a legegyszerűbb alakjában is rendkívüli a jelentősége. Számos elméleti és numerikus feladat hozható erre az alakra. A (9.2) Laplace egyenlet megoldása a sebességi potenciál, a sebesség e potenciál ekvipotenciális vonalaira merőleges. E merőlegesség legfeljebb a szinguláris pontokban nem teljesül.

Időálló, állandó sűrűségű közegek síkáramlásának esetében bevezethetjük az áramfüggvényt is ( $\psi = \psi(x, y)$ ). Az áramfüggvény szintvonalai az áramvonalak, melyek érintői a sebesség vektorokkal párhuzamosak. Emiatt a sebesség és az áramfüggvény-ívelem vektori szorzata nulla:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{ds} = 0 \Rightarrow c_x dy - c_y dx = 0; \quad (9.3)$$

Definiáljuk a sebesség összetevőket az alábbi módon és tekintsük a sebességtér rotációjának a síkra merőleges összetevőjét (legyen a síkra merőleges a „z” tengely):

$$c_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad c_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{ezzel:} \quad (9.4)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{c} \Big|_z = \frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = -\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\Delta \psi;$$

(9.4) csak síkáramlásra érvényes ugyan, de ebben az esetben megengedhető nullától különböző örvényesség is. (9.4) például az örvénytranszport egyenlettel együtt sokféle feladat numerikus megoldására alkalmas.

Tekintsük most az összenyomhatatlan közeg örvénymentes, időálló síkáramlásait. Ekkor a sebességi potenciál és az áramfüggvény komplex potenciállá kapcsolható össze:

$$w = w(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y); \quad \text{ahol: } z = x + i y \quad (9.5)$$

A komplex potenciálok szerepe a klasszikus és modern áramlástanban egyaránt jelentős, a XX. század eleji első elterjedést napjainkban, egyes numerikus módszerekben való alkalmazás miatti fellendülés követi.

Vizsgáljuk meg a sebesség kiszámításának módjait. A sebesség komplex konjugáltját a komplex potenciál deriválásával kapjuk meg. Ezt a deriváltat – a komplex függvények elméletéből ismert módon, háromféleképpen is számíthatjuk:

$$\hat{c} = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial(iy)};$$

azaz: (9.6)

$$c_x - ic_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y};$$

Ennek az egyenletnek az alapján felírhatók a Cauchy-Riemann féle parciális differenciál-egyenletek:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right\};$$
(9.7)

Ezek a parciális differenciál-egyenletek azok, amelyek alapján két – a megfelelő feltételeknek eleget tevő – függvény harmonikus társnak minősíthető, illetve e függvények ilyen módon rendelhetők egymáshoz. E két függvény – esetünkben az ekvipotenciális vonalak és az áramvonalak az „ $x$ - $y$ ” síkon ortogonális hálót alkotnak. (Erre példa a 9.1 és 9.2 ábra).

A  $c$ , állandó sebességű síkáramlás komplex potenciálja:

$$w = \hat{c} z;$$
(9.8)

A (9.6) kifejezés alkalmazásával könnyen belátható, hogy (9.8) tényleg a mondott síkáramlás komplex potenciálja.

A következőkben az ún. szingularitások segítségével vezetjük be a forrás-nyelő ( $Q$ ), az örvény ( $\Gamma$ ) és a dipólus ( $M$ ) komplex potenciálját. Ezek rendre a következők:

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln z; \quad w = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad \text{és} \quad w = \frac{M}{z};$$
(9.9)

A forrás komplex potenciáljának valós része a sebességi potenciál, a képzetes része pedig az áramfüggvény:

$$w = \varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln z = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\vartheta); \quad \text{itt: } z = r e^{i\vartheta};$$

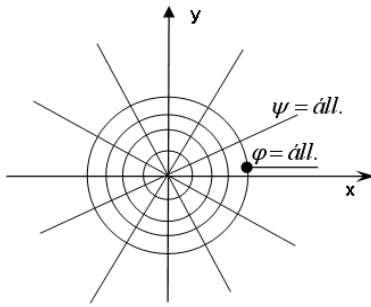
vagyis:

$$\varphi = \text{áll.} = \frac{Q}{2\pi} \ln r \Rightarrow r = \text{áll.} \quad (\text{origó középpontú körök}) \quad \text{és}$$

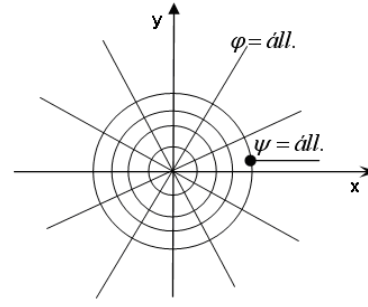
$$\psi = \text{áll.} = \frac{Q}{2\pi} \vartheta \Rightarrow \vartheta = \text{áll.} \quad (\text{origóból induló egyenesek});$$

A 9.1. ábrán a forrás vagy nyelő áramvonalai az origóból kiinduló vagy oda befutó egyenesek, az ekvipotenciális vonalak pedig koncentrikus körök. Az origó szinguláris pont, ahol végtelen sok áramvonal metszi egymást – a szinguláris pont neve forrás, ha onnan kifelé áramlik a közeg

( $Q > 0$ ) és nyelő, ha befele áramlik a közeg ( $Q < 0$ ). A „ $Q$ ” egyébként éppen a forrás, vagy nyelő kibocsátott vagy elnyelt térfogat-árama.



9.1. ábra – Forrás, vagy nyelő áram- és sebességi potenciál vonalai



9.2. ábra – Potenciális örvény áram- és sebességi potenciál vonalai

Az örvény komplex potenciálja és a forrás komplex potenciálja között a különbség a képzetes egységgel való szorzás, illetve, hogy a jellemző mennyiséget „ $Q$ ” helyett „ $\Gamma$ ”-val jelöljük, és cirkulációnak nevezzük. A potenciál, illetve az áramfüggvény (ezeket a 9.2. ábrán tüntettük fel):

$$w = \varphi + i\psi = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi} (i \ln r - \vartheta);$$

vagyis, a potenciális örvény esetében:

$$\varphi = \text{áll.} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta \Rightarrow \vartheta = \text{áll.} \quad (\text{origóból induló egyenesek}) \quad \text{és}$$

$$\psi = \text{áll.} = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \Rightarrow r = \text{áll.} \quad (\text{origó középpontú körök})$$

A cirkulációt a (2.13) egyenlettel definiáltuk. Gyakran keletkezik jól megfigyelhető cirkuláció vagy örvény folyóvizekben, például hídpillérek vagy evezőlapátok után, esetleg a vízbe nyúló akadályok után. Örvény képződik a szárnyashajók szárny, vagy a repülőgépszárnyak körül is. Az ilyen esetekben a kialakuló, valóságos áramképet jelentősen befolyásolja a közeg (vagy másik oldalról a jármű) egyenletes haladási sebessége. A szárnyprofilok körüli áramlásról a 18. pontban részletesebben is szólnunk.

Összegezzük a síkáramlás és a dipólus komplex potenciálját, legyen a síkáramlás sebessége a valós tengellyel párhuzamos ( $c$  tehát valós szám):

$$w(z) = cz + \frac{M}{z}; \quad (9.10)$$

Ezzel egy henger körüli áramlás komplex potenciálját kapjuk. Ezt igazolandó írjuk fel részletesen (9.10)-et:

$$w(z) = c r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) + \frac{M}{r} (\cos \vartheta - i \sin \vartheta);$$

Innen a  $\psi = 0$  áramvonal egyenlete:

$$\psi(r, \vartheta) = \left( cr - \frac{M}{r} \right) \sin \vartheta = 0 \Rightarrow az R = \sqrt{\frac{M}{c}} \text{ sugarú kör valóban a nulla áramvonal.}$$



Számítsuk ki a sebesség eloszlást ezen az áramvonalon:

$$w(z) = c \left( z + \frac{R^2}{z} \right) \Rightarrow \hat{c} = \frac{dw}{dz} = c \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right); \quad (9.11)$$

Egyszerű számolással belátható, hogy a sebesség abszolút értéke ezen az áramvonalon:

$$|c_\vartheta(\vartheta)| = |2c \sin \vartheta|; \quad (9.12)$$

A Bernoulli egyenlet felhasználásával – hiszen ideális folyadék stacionárius áramlásáról van szó – számítható a nyomás-tényező:

$$\bar{p} = \frac{p - p_0}{\frac{\rho}{2} c^2} = 1 - \left( \frac{c_\vartheta}{c} \right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \vartheta; \quad (9.13)$$

A henger körüli nyomáeloszlást ábrázoltuk is – azonban, mivel ez a nyomás-eloszlás a súrlódásos áramlások esetében is nagyon fontos és érdekes, azért az ábra a 18. fejezetben található (18.1 ábra).

## Mintafeladat

**Feladat:** Milyen áramlást ír le a  $w = z^2$  komplex potenciál? Az egyenletük alapján vázolja az áramvonalakat és az ekvipotenciális vonalakat a  $0 \leq x \leq 1$  és  $0 \leq y \leq 1$  tartományon! Bizonyítsa be: egy-egy áramvonal mentén a nyomás az  $y = x$ ,  $45^\circ$ -os egyenessel való metszés-pontban a legnagyobb!

**Megoldás:** A komplex potenciálok – a korábbiakban mondottak értelmében – összenyomhatatlan közeg időben állandó, síkáramlását írják le. Határozzuk meg a konkrétan vizsgálandó komplex potenciál valós és képzetes részét:

$$w = z^2 \Rightarrow \varphi + i\psi = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy; \quad (9.14)$$

azaz:

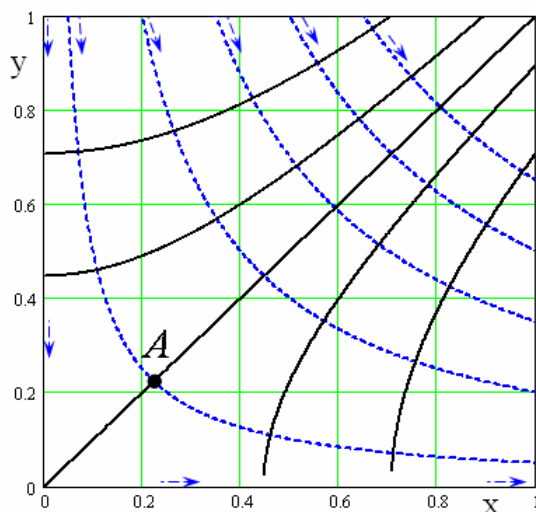
$$\varphi = x^2 - y^2 \quad \text{és} \quad \psi = 2xy;$$

Ezek szerint a  $\varphi = \text{áll.}$  az ekvipotenciális vonalak, a  $\psi = \text{áll.}$  pedig az áramvonalak egyenlete. Az egyenleteknek megfelelő görbék 9.3 ábrán láthatók. Az ekvipotenciális vonalak folytonosak, az áramvonalak pedig (kék) szaggatott vonalak. Az ábráról látszik, hogy ez a két görbe-sereg ortogonális hálót feszít ki, azaz egy-egy áramvonal és ekvipotenciális vonal metszéspontjában az egyes görbék érintői egymásra merőlegesek.

Nem jelöltük külön, de belátható, hogy a két koordináta tengely éppen a  $\psi = 0$  áramvonal. Vagyis ez egy  $90^\circ$  fokos „sarok”-ban kialakuló áramlás képe.

Határozzuk meg az áramvonalak mentén kialakuló áramlás irányát:

$$c_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x; \quad \text{és} \quad c_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2y;$$



**9.3. ábra – Áramvonalak és ekvipotenciális vonalak**

A 9.3. ábrán – kis nyilakkal – be is jelöltük az áramlás irányát. A nyilak csak a sebesség irányát jelzik, a sebesség nagysága a fenti képletekből számítható. Az origóban például a sebesség mindkét összetevője nulla – vagyis ott az eredő sebesség nulla.

A 9.3. ábrán – példaként – bejelöltük az „A” pontot. A kérdés második része szerint ugyanis bizonyítandó, hogy például az adott áramvonal mentén a nyomás az „A” pontban a legnagyobb. Ehhez fel kell használni a későbbiekben részletesebben is sorra kerülő Bernoulli egyenlet (12. fejezet) fizikai mondanivalóját – ami szerint a nyomás a sebesség (négyzetének) csökkenésével növekszik, ha csak a Bernoulli egyenlet összes többi – a nyomáson és sebességen kívüli – tagját azonosan nullának választhatjuk.

Ezek szerint azt kell bizonyítani, hogy a példaként tekintett áramvonalon a sebesség éppen az „A” pontban a legkisebb. Számítsuk ki a komplex potenciálból a sebességet, illetve annak abszolút értékét:

$$\hat{c} = \frac{dw}{dz} = 2z \Rightarrow |\hat{c}| = 2r \quad (\text{hacsak } z = r e^{i\vartheta}); \quad (9.15)$$

Mivel pedig a példa-áramvonalon az origóhoz éppen az „A” pont van a legközelebb, azért a sebesség ott a legkisebb és a fentiek értelmében a nyomás ott a legnagyobb. Az áramvonal választás tetszőleges volt – bármely másik áramvonalra is igaz tehát a fenti okfejtés. Ezek szerint a bizonyítandó állítást sikerült igazolni.

További, egyes esetekben e tantárgy vizsgakövetelményeit jelentősen meghaladó, de ehhez a témakörhöz illeszkedő gyakorlati feladatok találhatók [7] példatár 19. „Súrlódásmentes síkáramlás” című fejezetében.

## 10. Örvényes áramlások

Ebben a fejezetben olyan áramlásokkal foglalkozunk, melyekben az örvényesség (a sebességtér rotációja) – legalább helyenként – zérustól különbözik. Az örvényes áramlások gyakorlati jelentősége igen nagy – elegendő csak arra gondolni, hogy az ún. „dinamikus felhajtóerő” létrejötte másiktól nézve (hordozónak nevezett) örvény megjelenését jelenti.

A *cirkulációt* ( $\Gamma = \oint \mathbf{c} ds$ ) már korábban (2.13 egyenlet) definiáltuk. A cirkulációt elvileg ugyan a Stokes tétel szerint a sebességtér rotációjából is számolhatnánk – e jegyzetben azonban csak olyan cirkulációval vagy más néven örvénnyel foglalkozunk, amely esetében a sebességtér rotációja a végtelenhez tart, miközben a felület, amelyen integrálunk, tart a nullához. Így kapunk egy örvény-szálat, amelynek cirkulációja  $\Gamma$  és az átmérője nulla.

A gyakorlatban is nagyon fontos az olyan örvény-szál, melyhez sebességi potenciált tudunk rendelni. Végezzük a számítást síkáramlás esetén, egy „ $r-\vartheta$ ” polár koordináta rendszerben. Ebben a koordináta rendszerben a sebesség rotációja a következőképpen számítható ((2.16) második sora szerint, feltéve, hogy a sebesség sugárirányú összetevőjére teljesül a  $\partial c_r / \partial \phi = 0$  összefüggés):

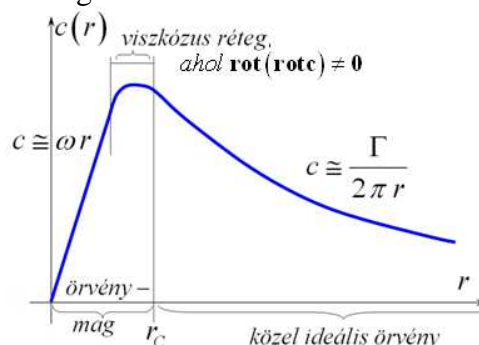
$$\text{rot}c|_z = \frac{c}{r} + \frac{dc}{dr} \quad (\text{vagyis az áramlás hengersizmetrikus}); \quad (10.1)$$

Tegyük fel, hogy ez a rotáció azonosan nulla, akkor (57) integrálásával a következőt kapjuk:

$$\frac{c}{r} + \frac{dc}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{dc}{c} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow c = \frac{K}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}; \quad (10.2)$$

Könnyen belátható, hogy a (10.2) szerinti sebesség a (9.9) kifejezésben definiált örvény komplex potenciáljából számítható sebesség abszolút értékével azonos. Az ilyen, „potenciális” örvény körül kialakuló áramképet a 9.2. ábrán tüntettük fel.

A 10.1. ábrán – kitekintésként – egy valóságos örvény sebesség eloszlását tüntettük fel. Az örvény az „ $r = 0$ ” helyen található és sebesség eloszlása az örvény-magon kívül jó közelítéssel azonos a potenciális örvény sebességeloszlásával.



10.1. ábra – Valóságos örvény sebesség eloszlása

Az örvény-mag lényegében két részre osztható, a belső rész merev testszerűen forog, ehhez csatlakozik az átmeneti rész, amelyben a viszkozitás jelentős szerepet játszik. A valóságos örvények öregsznek – az idő múlásával a mag sugara ( $r_c$ ) növekszik, közben pedig a legnagyobb sebesség értéke csökken.

A súrlódásos áramlások vizsgálatánál megmutatjuk majd, hogy a súrlódás szerepe éppen az ún. „viszkózus réteg”-ben jelentős, ezen kívül lényegében elhanyagolható.

A következőkben (ideális) potenciális örvényekkel foglalkozunk. Vizsgáljuk meg először egy örvény (cirkuláció) időbeli változását:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{c} \, ds; \quad (10.3)$$

A differenciálást és az integrálást felcserélve, illetve az Euler egyenletet beírva kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{c} \, ds = \oint \frac{d\mathbf{c}}{dt} \, ds + \oint \mathbf{c} \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \oint \left( -\frac{\mathbf{grad} \, p}{\rho} + \mathbf{g} \right) ds + \oint \mathbf{c} \, dc \quad (10.4)$$

A fenti kifejezés jobb oldalán lévő első tag, állandó sűrűség esetén akkor nulla, ha a térerősségnek ( $\mathbf{g}$ ) van potenciálja. A jobb oldal második tagjáról rögtön látható, hogy az nulla. Ezzel a következő eredményre jutunk:

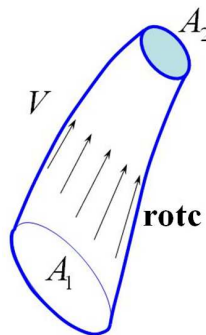
$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad \text{illetve:} \quad \oint \mathbf{c}^T \, ds = \text{állandó}; \quad (10.5)$$

A (10.5) **Thomson** (lord **Kelvin**) tétele; kimondja, hogy a cirkuláció értéke – ideális, összenyomhatatlan közeg esetén – egy zárt, folyékony vonal mentén az időtől független. Kelvin tételéből levonható számos következtetés közül az egyik legfontosabb az, hogy a nyugvó térből eredő, ideális áramlás örvénymentes, azaz potenciális marad.

Amennyiben a közeg sűrűsége barotróp módon változhat (ez fontos a meteorológiában, a repülésben és más, változó sűrűségű áramlások esetén), akkor a Bjerkness féle örvény-tételt kapjuk:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint \frac{\mathbf{grad} \, p}{\rho} \, ds = -\oint \frac{d \, p}{\rho}; \quad (10.6)$$

**Helmholtz** örvény-tételeit a 10.2 ábrán látható örvénycső felhasználásával vezetjük be. Az örvénycső hasonló az áramcsőhöz, csak áramvonal helyett örvényvonalak ( $\mathbf{rot} \, \mathbf{c} \times d\mathbf{s} = \mathbf{0}$ ) alkotják.



10.2. ábra – Örvénycső

Vektoranalitikai azonosság, hogy  $\text{div}(\mathbf{rot} \, \mathbf{c}) = 0$ , ezért ennek a mennyiségnek az örvénycső térfogatára vett integrálja is nulla. A Gauss-Ostrogradszkij tételt alkalmazva írható, hogy:

$$\int_V \text{div}(\mathbf{rot} \, \mathbf{c}) \, dV = \int_A \mathbf{rot} \, \mathbf{c}^T \, d\mathbf{A} = 0;$$

Ezért:

$$\int_{A_1} \text{rot } \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \Gamma_1 \text{ és } \int_{A_2} \text{rot } \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \Gamma_2 \Rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 = 0; \quad (10.7)$$

$$\text{mert } \int_{A-A_1-A_2} \text{rot } \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = 0$$

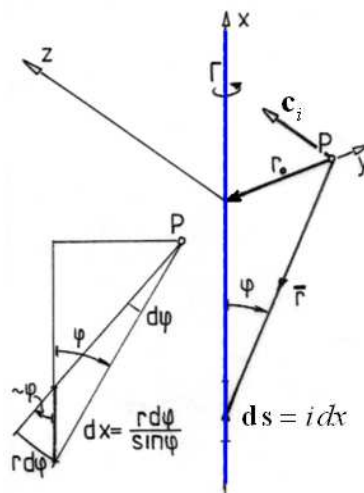
Kimondható tehát, hogy a cirkuláció abszolút értéke – egy örvénycső két, örvényvonalakkal nem párhuzamos metszetében – azonos. Ebből következik, hogy egy örvénycsőnek a közegen belül nem lehet vége: az örvénycső vagy önmagába záródik, vagy a közeg határáig tart. A záródásra példa a természetben gyakran kialakuló örvény gyűrű. A „határig tart” eset jól megfigyelhető víz áramlásakor: az ott keletkező örvények „vége” a víz felszínén jól megfigyelhető.

Helmholtz másik örvény tételének több megfogalmazása ismert:

- az örvénycsövek egyúttal áramcsövek is;
- az örvényesség a részecskékhez kötődik (egy örvény azonos részecskékből áll);
- két örvényfelület metszésként előálló örvényvonal azonos részecskékből áll.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából nagyon fontos egy-egy örvény-szál ( $\Gamma$ ) által, valamely „P” pontban indukált sebesség ( $\mathbf{c}_i$ ) számítása. Ez a Biot-Savart törvény alapján lehetséges:

$$\mathbf{c}_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{\mathbf{ds} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}; \quad (10.8)$$



10.3. ábra – Egyenes örvényszál által indukált sebesség

Tegyük fel – az egyszerűség kedvéért – hogy az örvény éppen az „x” tengely mentén helyezkedik el. Ebben az esetben a „P” pontban keltett indukált sebességet (10.3 ábra) az alábbi módon számíthatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i|_z &= - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r \sin \varphi (r d\varphi / \sin \varphi)}{r^3} = \\ &= - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{r} \quad \text{de: } r = r_0 / \sin \varphi; \quad \text{ezzel:} \end{aligned}$$

$$\mathbf{c}_i|_z = -\frac{\Gamma}{4\pi r_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi r_0} [\cos \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2};$$

Végeredményben, a mínusz végtelentől ( $\varphi_1 \Rightarrow 0$ ) plusz végtelenig ( $\varphi_2 \Rightarrow 180$ ) terjedő integrál értéke:

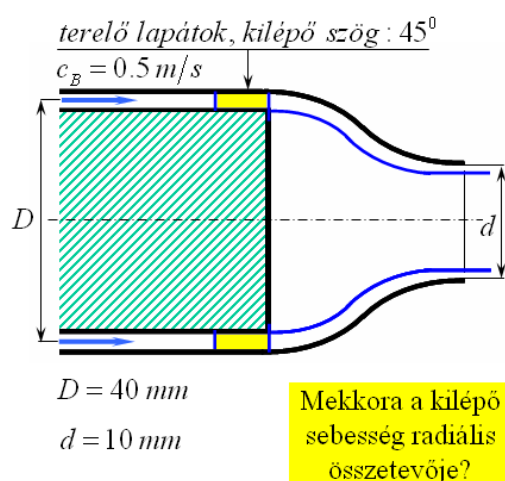
$$|\mathbf{c}_i| = -\frac{\Gamma}{4\pi r_0} [-1-1] = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}; \quad (10.9)$$

Ugyanerre az eredményre jutottunk az (9.9)-cel leírt örvény komplex potenciálja alapján és a potenciális örvény (10.2)-ban megfogalmazott esetében. Ez célszerűen úgy képzelhető el, hogy a síkáramlás – amelyet a potenciális örvény bevezetésénél kikötöttünk – általában nem egy kétméretű tartományban (síkon) jön létre, hanem azt jelenti, hogy a szóban forgó síkra merőleges irányban semmi sem változik. Azaz az áramlás olyan háromméretű áramlás, amelyben minden síkmetszetben azonos áramkép alakul ki.

A (10.8)-cal adott indukált-sebesség számítási lehetőség előfordul szinte minden, az örvényesség felhasználásán alapuló numerikus feladatban. Számos szakmunkában foglalkoznak ennek az integrálnak a zárt alakú vagy numerikus kiszámítási lehetőségeivel. Megjegyzendő, hogy (10.8) egyáltalán nem csak síkáramlásokra vonatkozik: segítségével bonyolult, időben változó, térbeli áramlások is vizsgálhatók.

## Mintafeladat

Az örvényes áramlások gyakorlati alkalmazása igencsak széleskörű, azonban ezek a feladatok általában jelentősen magasabb szintet képviselnek, mint az e tárgyban meghatározott szint. Ezért bemutatunk ugyan egy gyakorlati feladatot, de ennek megoldásában számos, jelentős egyszerűsítést vezetünk be!

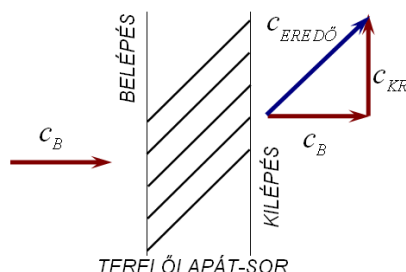


10.4. – ábra Fúvóka modell

Feladat: a 10.4 ábrán egy fúvóka modellje látható. Állandó sűrűségű (összenyomhatatlan) közeg érkezik  $c_B$  sebességgel, majd ezt az áramlást a terelő lapátok úgy változtatják meg, hogy az

axiális sebesség állandósága mellett az axiális sebességgel egyenlő (a  $45^\circ$  miatt) tangenciális sebesség is létrejön. A közeg a fal mellett, elhanyagolható vastagságú rétegben áramlik tovább. A feladat a kilépő sugár radiális sebességének meghatározása!

**Megoldás:** A radiális sebesség a terelő lapátok után egyenlő az axiális sebességgel:  $c_{KR} = 0.5 \text{ m/s}$ . Ez a folytonosság törvényéből következik.



**10.5. ábra. – Áramlás a terelőlapátokon keresztül**

A 10.5. ábrán egy, síkba fejtett terelőlapát sor látható. Láthat, hogy, a tengelyirányú átáramlási keresztmetszet nem változik. A közeg összenyomhatatlan, tehát a tengelyirányú sebesség ( $c_B$ ) állandó marad. Az álló terelőlapát-sor ugyanakkor megváltoztatja az erdő sebesség irányát. A  $45$  fokos szögből következik, hogy a tengelyirányú és a radiális sebesség összetevő egyenlő lesz, vagyis a  $c_{KR} = 0.5 \text{ m/s}$  állítás tényleg igaz. (Az eredő sebesség növekedése természetesen nyomáscsökkenést okoz – vigyázni kell arra, hogy ez a nyomáscsökkenés ne legyen túl nagy – pl. ne csökkenjen a közeg nyomása az adott hőmérsékleten vett telítési gőznyomás alá.)

A közegből kialakuló áramcső egyúttal örvénycső is, hiszen a terelőlapátok miatt kialakuló rotáció (örvényesség) mindenütt párhuzamos a sebességgel. Helmholtz tétele szerint a cirkuláció abszolút értéke – egy örvénycső két, örvényvonalakkal nem párhuzamos metszetében – azonos.

Számítsuk ki a cirkulációt a terelőlapátok utáni keresztmetszetben (a feladat kiírásának megfelelően hanyagoljuk el a sugár vastagságát):

$$\Gamma_1 = \oint \mathbf{c}^T \mathbf{ds} = (\pi D) c_R = \pi \cdot 0.04 \cdot 0.5 = 0.0628 \text{ m}^2/\text{s}; \quad (10.10)$$

Helmholtz tétele szerint (vagy ami lényegében azonos, a perdület megmaradás elve alapján) a cirkuláció abszolút értéke ugyanekkora lesz a kilépő keresztmetszetben is, azaz a sugár vastagságától ismét eltekintve:

$$\Gamma_1 = 0.0628 \text{ m}^2/\text{s} = (\pi d) c_{KR} = \Gamma_2; \quad (10.11)$$

$$\text{azaz: } \Rightarrow c_{KR} = \frac{\Gamma_2}{\pi d} = \frac{0.0628}{\pi \cdot 0.01} = 2 \text{ m/s};$$

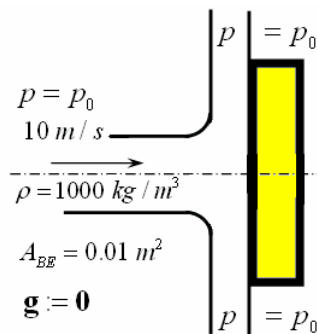
A megoldásból látható, hogy a megforgatott közeg radiális sebesség-összetevője, a csökkenő átmérő felé haladva növekszik. A gyakorlatban a feladatbelinél sokkal nagyobb átmérő csökkenést is megvalósítanak – egy ilyen geometria számítása azonban a jelen szinten áthidalhatatlan nehézségekre vezetett volna és adott esetben a nyomásviszonyok figyelemmel kísérésétől sem szabad eltekinteni.

Az örvénytételekkel kapcsolatos feladatok találhatóak [7] 14. „Örvénytételek” c. fejezetében. Vigyázat: e feladatok némelyike meghaladja jelen tantárgy vizsgakövetelményeit.

## 11. Az impulzus tétel alkalmazása

A mozgásmennyiség megmaradására épülő, „impulzus tétel”-nek nevezett vektor egyenletet a 7. pontban vezettük be. A leggyakrabban használt alakját a (7.9) illetve a (7.10) kifejezés írja le. Fontossága és összetettsége miatt - segítségként - néhány példa feladatot oldunk meg. Ezek tulajdonképpen „Minta feladat”-ok, kiemelt fontosságuk miatt azonban külön fejezetben szerepelnek.

Az első feladatban bevezetésként egy, igazán egyszerű probléma megoldását vizsgáljuk. A megoldásban felhasználjuk a folytonosság törvényét és – nagyon egyszerű szinten – a Bernoulli egyenletet is; a fő eszköz azonban az „impulzus tétel”-nek nevezett egyenlet (7.10) egyszerű, de igen gyakran használt alakja.



11.1. ábra – Szilárd lapot érő víz sugár

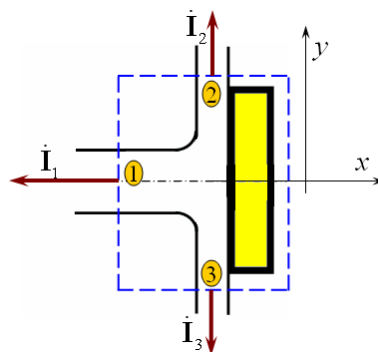
A feladat: mekkora erőt fejt ki a 11.1 ábrán látható víz sugár az útjában lévő laphoz?

Mivel az erő vektor mennyiség, tehát a nagyságát és az irányát is meg kell határozni!

Az ábráról az is megállapítható, hogy a térerősség (pl. súlyerő) értéke nulla, illetve, hogy minden sugár un. szabad sugár, ezért bennük a környezeti nyomás uralkodik.

Minden, ilyen feladat megoldását három, elengedhetetlen lépéssel kell kezdeni:

- ellenőrző felületet kell választani (11.2 ábra, szaggatott vonallal jelölt, egyszerűen összefüggő, zárt felület, ügyelni kell arra, hogy ha lehet, akkor a felület legyen merőleges az áthaladó közeg sebességére); ügyelni kell továbbá arra is, hogy az „idegen test” vagy teljes egészében a felület belsejében legyen, vagy egyáltalán ne legyen benn;
- ki kell jelölni a be- és kilépési pontokat (itt az 1, 2 és 3-as pont);
- koordináta rendszert kell választani (itt az x-y rendszert választottuk; nagyon fontos, hogy a koordináta rendszer alkalmas legyen – vagyis illeszkedjen a feladathoz).



11.2. ábra – Ellenőrző felület és koordináta rendszer kijelölése



Annak alapján, hogy a nyomás mindhárom (szabad) sugárban azonos, továbbá mert nincs helyzeti energiaváltozás és munkavégzés, vagy energia bevezetés sincs, kimondható, hogy a sebesség abszolút értéke mindhárom sugárban, azonos – ez egy nagyon fontos, gyakran előforduló megfontolás. Ez az energia megmaradás elvéből következik, illetve ez a Bernoulli egyenlet igen egyszerű alkalmazása. A sebesség egyébként a felület mentén sem változik; átlagsebességként tekintjük. A sebesség vektor abszolút értéke (az abszolút érték jelének elhagyásával) egyszerűen írható:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c = 10 \text{ m/s}; \quad (11.1)$$

Az átlagos sebesség abszolút értékének azonosságából, a folytonosság törvénye alapján következik, hogy a 11.1 ábrán (vagy a 11.2 ábrán) felfele és lefele haladó közeg átlépési felülete egyenlő és éppen a belépő keresztmetszet felével egyenlő. Vagyis a belépő tömegáram két egyenlő részre oszlik, az egyik rész-áram felfele, a másik lefele hagyja el az ellenőrző felületet.

A könnyebb áttekinthetőség miatt megismételjük a (7.10) egyenletet:

$$\int_{(A)} \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = - \int_{(A)} p \mathbf{dA} + \int_V \rho \mathbf{g} dV - \mathbf{T}; \quad (7.10)$$

Számítsuk ki ennek az egyenletnek a tagjait. Kezdjük az időegységre eső mozgásmennyiség-változást jelentő bal oldallal. Ez az „A” zárt felületre vett integrál – de, minthogy közegáram csak három, meghatározott helyen van és, ráadásul a sebesség átlagsebesség lévén nem változik, azért a következőképpen számolhatunk:

$$\int_{(A)} \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \dot{\mathbf{I}}_1 + \dot{\mathbf{I}}_2 + \dot{\mathbf{I}}_3 = \begin{bmatrix} -\rho c^2 A_{BE} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho c^2 A_{BE} / 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho c^2 A_{BE} / 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (11.2)$$

A (11.2)-ből is jól látszik, hogy (7.10) vektor egyenlet. A koordináta rendszer választásának megfelelően „x” lesz az „érdekes” irány, az „y” irányban azonosan nulla időegységre eső mozgásmennyiség változást kapunk és a „z” iránnyal – a két-dimenziós feladat miatt – egyáltalán nem számolunk.

Fontos leszögezni, hogy az „I” vektorok mindegyikének az előjele – mivel vektor előtt az előjelnek mindig fizikai tartalma van – pozitív. A vektor komponensek, a kiszámításnak megfelelően lehetnek akár pozitívak, akár negatívak is, aszerint, hogy az integrál kiszámítása milyen előjelre vezet. A számolást megkönnyítő, egyszerű szabályként kimondható, hogy az időegységre eső mozgásmennyiség változás vektorok mindig a sebesség egyenesén fekszenek és az ellenőrző felületből kifelé mutatnak (11.2 ábra).

A jobb oldal első tagjáról belátható, hogy az nulla, mivel az ellenőrző felület minden pontjában azonos a nyomás:

$$\int_{(A)} p \mathbf{dA} = \int_{(A)} p_0 \mathbf{dA} = p_0 \int_{(A)} \mathbf{dA} = \mathbf{0}, \quad \text{mert} \quad \int_{(A)} \mathbf{dA} = \mathbf{0}; \quad (11.3)$$

A jobb oldal második tagja ismét nulla, mivel a feladat leírásánál kikötöttük, hogy az eredő térerősség nulla:

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV = 0, \quad \text{mert} \quad \mathbf{g} \equiv \mathbf{0}; \quad (11.4)$$

Ezek szerint a (7.10) egyenletből csak a bal oldal, illetve a jobb oldal utolsó tagja marad meg:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}}_1 + \dot{\mathbf{I}}_2 + \dot{\mathbf{I}}_3 &= -\mathbf{T}; \\ \begin{bmatrix} -\rho c^2 A_{BE} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho c^2 A_{BE} / 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho c^2 A_{BE} / 2 \\ 0 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (11.5)$$

A „ $\mathbf{T}$ ” a testre ható erő-vektor, amit a feladat szerint ki kellett számítani. Ez (11.5) alapján már egyszerűen megtehető (az erőt a baloldalra hozva és az  $\dot{\mathbf{I}}_2 + \dot{\mathbf{I}}_3 = \mathbf{0}$ -t felhasználva) írható:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho c^2 A_{BE} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \cdot 10^2 \cdot 0.01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \text{azaz} \quad T_x &= 1000 \text{ N}; \end{aligned} \quad (11.6)$$

Vagyis arra az eredményre jutottunk, hogy a testre ható erő egyetlen, „ $x$ ” irányú komponense nem nulla, a másik két összetevő nulla. A testre ható erő hatásvonala az „ $x$ ” tengely. (Általánosabb esetben ezzel a tengellyel párhuzamos.)

(11.6)-ból az is kiderül, hogy  $T_x$  pozitív, ami azt jelenti, hogy a keresett erő összetevő a pozitív „ $x$ ” tengely irányába mutat. Ennek alapján pedig kijelenthető, hogy a testre ható erő is (mivel a másik két komponense nulla) a pozitív „ $x$ ” tengely irányába mutat ( $\rightarrow$ ).

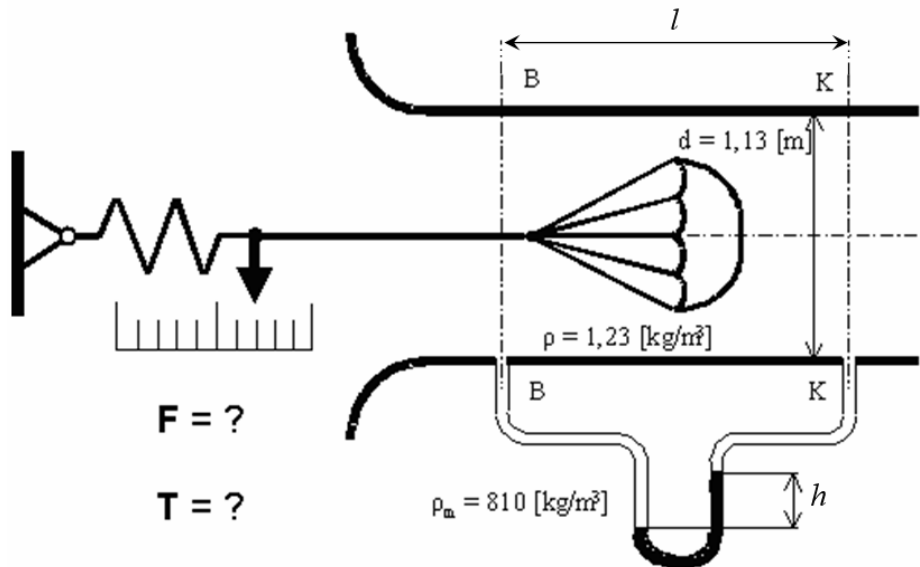
A feladat megoldása alapján levonható az a tanulság, ami szerint (7.10) vektor egyenlet, belőle ebben a feladatban az erő vektort fejeztük ki, illetve határoztuk meg. Vagyis nincsen szükség semmiféle előzetes erő-felvételre – egyszerűen meg kell oldani a megfelelő egyenletet, amiből az eredmény – jelen esetben egy vektor mennyiség, tehát a nagyság és az irány – kiadódik.

## 11.1 Szélcsatorna modell vizsgálata

A második feladatban a teljesség kedvéért a súrlódás hatását is vizsgáljuk (vigyázat: ez, megfelelő átfogalmazás estén ki is hagyható a feladatból), ezért az alábbi alapegyenletből indulunk ki:

$$\int_{(A)} \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T d\mathbf{A} = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A} + \mathbf{S} - \mathbf{T}; \quad (11.7)$$

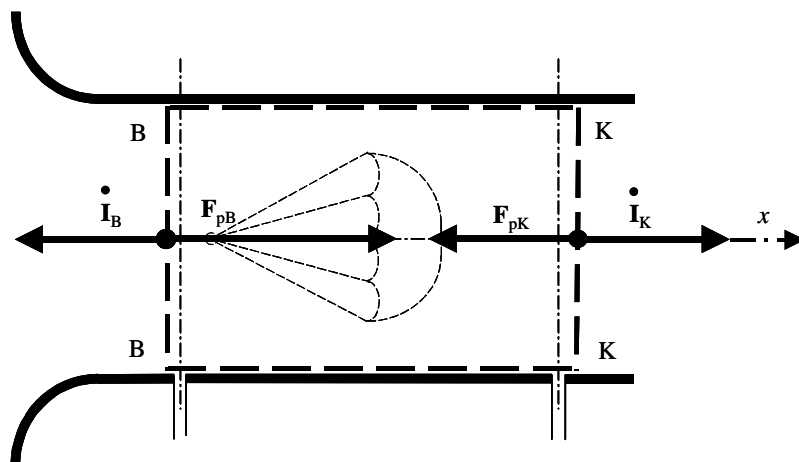
A (11.7) egyenlet (amely a (7.9)-cel azonos és valóságos közeg stacionárius, legfeljebb kvázi-stacionárius áramlására alkalmazható) számos feladat megoldásában kap fontos szerepet. Ebben az előadás vázlatban – mivel ez egy nagyon fontos terület – egy további példát is bemutatunk. A példa néhány tekintetben a valóságos közegek áramlására is vonatkozik – e részek megértéséhez az előadás vázlat későbbi fejezeteinek tanulmányozása vagy a megadott szakirodalom feldolgozása szükséges.



11.3. ábra – Ejtőernyő kisminta szélcsatornában

Egy ejtőernyő kismintát vizsgálunk szélcsatornában (11.3 ábra). Az U-csöves manométerrel az üres mérőtér esetén 5 mm, a minta elhelyezése után 21 mm kitérést mérünk ( $h$ ). Legyen a térfogatáram  $\dot{V} = 64 \text{ m}^3/\text{s}$ . A mérőfolyadék sűrűsége  $810 \text{ kg/m}^3$ . Tegyük fel, hogy a mérőtér „B” és „K” keresztmetszetében a nyomáseloszlás egyenletes (azaz a „B” keresztmetszet minden pontjában „ $p_B$ ” és a „K” keresztmetszet minden pontjában „ $p_K$ ” a nyomás). Számoljunk továbbá mindkét keresztmetszetben az átlagsebességgel. A két keresztmetszet távolsága:  $l = 2 \text{ [m]}$ . A nehézségi erőtér hatása elhanyagolható. Számítsuk ki a közepes fal csúsztató feszültség értékét! Mekkora és milyen irányú erő hat az ejtőernyő kismintára („ $T$ ”) és a levegőre („ $F$ ”)?

A feladatot az impulzus tétellel célszerű megoldani. Az impulzus tétel vektor egyenlet, három skalár egyenletből áll. Az egyenletek felírásához illetve értelmezéséhez szükség van ellenőrző felület és koordináta tengely kijelölésére (11.4 ábra).



11.4. ábra – Ellenőrző felület és koordináta rendszer

A 11.4. ábrán látható ellenőrző felületet (szaggatott vonal jelzi) úgy választottuk, hogy az egyszeresen összefüggőségen túl az ejtőernyő kismintát teljes egészében magában foglalja. Az ellenőrző felület a szélcsatorna belső felületét (belülről) érintse és a be- valamint a kilépő felületek legyenek a szélcsatorna tengelyére merőlegesek, azaz a felületi normálisok legyenek az átlagsebességgel párhuzamosak. A koordináta rendszer választása itt az „ $x$ ” tengely választását jelenti, ez az egyetlen irány, ami a triviálistól (azonosan nulla) különböző eredményt ad.

A feladatban szerepet játszik a súrlódás is: a nyomásesést megmértük az üres mérőtér esetén is. A súrlódás hatását az ellenőrző felület – henger felület – „B” és „K” pontok közé eső palást részén ébredő erővel ( $\mathbf{S}$ ) jellemezzük. Ez az erő a palást-felület és a fali csúsztató feszültség szorzata, „ $x$ ” irányú, azonban az ábrán nem tüntettük fel, mert az értelme jelenleg nem ismert – ezt a számításból határozzuk meg majd.

Számoljuk ki először (11.7) bal oldalát, ami fizikai szempontból az időegységre eső, be- és kilépő mozgásmennyiség változások eredője. Az integráljel alatt álló  $\rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = dm$  az elemi tömegáramokat adja, ezek skaláris mennyiségek, belépő tömegáram esetén - mivel  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{dA}$  közti szög nagyobb 90 foknál, a példánkban éppen  $180^\circ$  - negatív, a kilépő tömegáram pedig, hasonló gondolatmenet alapján, pozitív.

Az elemi tömegáramokat a sebességgel kell szorozni - az időegységre eső mozgásmennyiség-változás vektor tehát a sebesség egyenesére esik, belépéskor értelme azzal ellentétes, kilépéskor azonos. Ebből következik az az egyszerű szabály, hogy az időegységre eső mozgásmennyiség-változás vektor az ellenőrző felületből kifelé mutat és a sebesség egyenesére esik. A feladatban átlagsebességgel számolunk, a kijelölt integrálás tehát igen egyszerűen elvégezhető (a gyakorlatban, igen sok esetben számolunk átlagsebességgel).

Tömegáram az ellenőrző felület palástján nincs, elegendő tehát a be- és kilépő felülettel számolni. A belépő időegységre eső mozgásmennyiség-változás vektor tehát (ezt a vektort a 11.4 ábrán fel is tüntettük):

$$\dot{\mathbf{I}}_B = \begin{bmatrix} -\rho c_B^2 A_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (11.8)$$

illetve csak a megfelelő komponenst felírva:  $\dot{I}_{Bx} = -\rho c_B^2 A_B$ .

ahol:  $A_B = d^2 \pi / 4 = (1,13^2 \pi) / 4 \cong 1 \text{ m}^2$ ;

$c_B = \dot{V} / A_B = 64 \text{ m/s}$ ; és:

$\dot{I}_{Bx} = -\rho c_B^2 A_B = -5038 \text{ N}$ .

Mivel a szélcsatorna mérőtere hengeres cső, tehát a ki- és belépő keresztmetszet azonos ( $A_B = A_K$ ) - a folytonosság törvénye miatt a kilépő sebesség egyenlő a belépő sebességgel, azaz  $c_K = c_B$ . Ennek megfelelően a kilépő időegységre eső mozgásmennyiség-változás vektor tehát:

$$\dot{\mathbf{I}}_K = \begin{bmatrix} \rho c_K^2 A_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (11.9)$$

illetve csak a megfelelő komponenst felírva:  $\dot{I}_{Kx} = \rho c_K^2 A_K$ .

ahol:  $A_K = A_B \cong 1 \text{ m}^2$ ;

$c_K = \dot{V} / A_K = 64 \text{ m/s}$ .

Mivel a sűrűség, a sebesség és a keresztmetszet azonos, a végeredmény abszolút értéke az előző értékkel azonos, előjele azonban a fent megadott szabály szerint pozitív lesz, az eredmény számszerűen a következő:

$$\dot{I}_{Kx} = \rho c_K^2 A_K = 5038 \text{ N}. \quad (11.10)$$

Eszerint tehát az időegységre eső mozgásmennyiség változás vektorok eredője ebben a feladatban (mindkét vizsgált esetben) nulla lesz, vagyis (11.7) bal oldala itt nulla. Ezzel a továbbiakban nem kell számolnunk. Más feladatokban természetesen más eredményre jutunk: a fentiekből a tanulás során a konkrét feladat megoldása mellett alapvetően a számítási módszert célszerű megérteni és elsajátítani.

A (11.7) egyenlet jobb oldalán, az első helyen az ellenőrző felületbe zárt folyadékra ható térfogati erők eredője áll - ezt a számításban elhanyagoljuk. Az áramlástan oktatásban, az ilyen típusú feladatoknál ez meglehetősen gyakori, azonban az elhanyagolásnak legalább tudatosnak illik lennie: ezt a tagot először meg kell vizsgálni és csak ha valóban megengedhető, akkor szabad elhanyagolni.

A jobb oldal második helyén a nyomásból származó felületi erők eredője található. (A harmadik helyen a csúsztató feszültségekből származó felületi erő szerepel.) A belépő- és a kilépő felületen értelmezett, nyomásból származó erőt a 11.4 ábrán tüntettük fel („ $\mathbf{F}_{pB}$ ” és „ $\mathbf{F}_{pK}$ ”). Mivel a folyadékokban a nyomás csak nem-negatív (általában kifejezetten pozitív) lehet, ezért ezek az erők mindig kintről befele irányulnak. Ezt fejezi ki egyébként a tag előtt szereplő negatív előjel is: ti. a megfelelő erő ellentétes a felületi normálissal, amely mindig kifelé mutat.

Mivel feltettük, hogy a nyomás a be- illetve a kilépő felület mentén nem változik, ezért ezeknek az erőknek a kiszámítása is igen egyszerű:

$$-\int_{A_B} p \, d\mathbf{A} = \mathbf{F}_{pB} = \begin{bmatrix} p_B A_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{és hasonlóan:} \quad \mathbf{F}_{pK} = \begin{bmatrix} -p_K A_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (11.11)$$

Illetve csak a (nullától különböző) komponenseket felírva:

$$F_{pBx} = p_B A_B; \quad \text{és} \quad F_{pKx} = -p_K A_K. \quad (11.12)$$

Az ellenőrző felület egyszerűen összefüggő, zárt felület. A be- és kilépő felületeket a mérőtér falát belülről érintő, hengerfelület köti össze. Ezen a nyomás egy-egy főkör mentén állandó, így az ebből származó, a hengerpaláston keletkező, a felületre merőleges erő nulla. Létezik azonban súrlódás, amit az üres mérőtér esetén mért 5 mm-es manométer kitérés jelez. Üres mérőtér esetén tehát a nyomáskülönbség (a levegő sűrűsége a mérőfolyadék sűrűségéhez képest kicsi, ezért ezt nem vesszük figyelembe):

$$p'_B - p'_K = \rho_m g h = 810 \cdot 9,81 \cdot 0,005 = 39,7 \text{ N/m}^2; \quad (11.13)$$

Továbbra is az üres mérőteret vizsgálva, felírhatjuk a nyomás-változásból származó erőt:

$$F'_{pBx} + F'_{pKx} = (p'_B - p'_K) A_B \cong 40 \text{ N}; \quad \text{ahol:} \quad (11.14)$$

$$A_B = A_K = d^2 \pi / 4 = 1,13^2 \pi / 4 \cong 1 \text{ m}^2$$

A nyomásból származó eredő erő pozitív (mert  $p'_B > p'_K$ ), tehát a pozitív „x” irányba mutat. A vizsgált esetben, (11.7) szerint tehát a mérőtér falát belülről érintő hengerfelületen a súrlódásból származó erő és a nyomásváltozásból származó erő van egyensúlyban:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}'_p + \mathbf{S}; \text{ azaz: } \mathbf{S} = -\mathbf{F}'_p = -\begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (11.15)$$

tehát:  $S_x = -40$  [N].

A sűrűdésből származó erő tehát a negatív „x” irányba mutat, azaz (amint azt a fizikai tapasztalatunk szerint el is várjuk) az áramló közeget fékezi. Ez az eredmény fontos lesz a második kérdés megválaszolásakor is, de előtte még ennek alapján számíthatjuk ki a fali csúsztató feszültség átlagos értékét.

Annak a hengerpalástnak, amin a csúsztató feszültség ébred a felülete:

$$A_{HP} = d \pi l = 1,13 \pi 2 = 7,1 \text{ [m}^2\text{]}; \quad (11.16)$$

Az átlagos fali csúsztató feszültség pedig az „S” abszolút értéke és e palástfelület ismeretében számítható:

$$\tau_0 = |S_x| / A_{HP} = 40 / 7,1 = 5,63 \text{ [N/ m}^2\text{]}; \quad (11.17)$$

Ezzel az első rész-kérdést megválaszoltuk. Vizsgáljuk ezután azt az esetet, amikor a mérőtérben az ejtőernyő kisminta is bent van. Ekkor a nyomásmérő kitérése 21 mm. A számításban megváltozik a nyomásból származó erő, a két, „x” irányú erőkomponens eredője ismét kiszámítható, mivel a nyomáskülönbséget az U-csöves manométer mutatja (a levegő sűrűsége a mérőfolyadék sűrűségéhez képest kicsi, ezért ezt most sem vesszük figyelembe):

$$p_B - p_K = \rho_m g h = 810 \cdot 9,81 \cdot 0,021 = 166,9 \text{ N/m}^2. \quad (11.18)$$

Ezzel:

$$F_{pBx} + F_{pKx} = (p_B - p_K) A_B \cong +167 \text{ [N]}. \quad (11.19)$$

Az eredmény egy pozitív szám, azt mutatja, hogy a levegőre ható, nyomáskülönbségből származó eredő erő a pozitív „x” irányban hat. Az eredő erő irányát a számolás automatikusan szolgáltatja - ha pozitív számot kapunk, akkor az erő a pozitív „x” irányban, ha negatív számot kapunk, akkor a negatív „x” irányban hat!

Írjuk fel (11.7) erre az esetre érvényes, egyszerűsített alakját:

$$\mathbf{0} = -\int_{(A)} p \mathbf{dA} + \mathbf{S} - \mathbf{T} = \mathbf{F}_p + \mathbf{S} - \mathbf{T}. \quad (11.20)$$

(11.20) jobb oldalán álló három erő közül a nyomáskülönbségből származó erőt és a sűrűdés hatására keletkező erőt már kiszámítottuk (+167 N, illetve - 40 N). A testre ható erő – ez az ejtőernyő modellre ható erő – innen már egyszerűen számítható:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}_p + \mathbf{S} \Rightarrow T_x = F_{px} + S_x = 167 - 40 = +127 \text{ [N]}. \quad (11.21)$$

Ez az erő a számításunk eredménye szerint a felvett „ $x$ ” tengely irányával azonos irányba mutat. Ez az irány megfelel a fizikai várakozásnak is. De ismételten hangsúlyozzuk: nem kellett az erő irányát előzetesen felvenni (megválasztani): a (11.7) egyenletből ez (is) következik! A számításunkkal az erővektort határozzuk meg, tehát annak nagyságát és irányát is kiszámítjuk - ebbe a gondolatmenetbe az erő "felvétele" egyáltalán nem illeszkedik.

Az erő kiszámításánál bemutatott módszer az egyszerűbb esetekben körülményesnek tűnhet; bonyolultabb esetben azonban véleményünk szerint ez a célravezető módszer.

Számítsuk ki végül – a feladatnak megfelelően – a levegőre (közegre) ható erőt. Amint az a (7.7) egyenlet magyarázatánál már olvasható volt, a most kiszámítandó erőnek a testre ható erő ( $\mathbf{T}$ ) a reakció ereje, így:

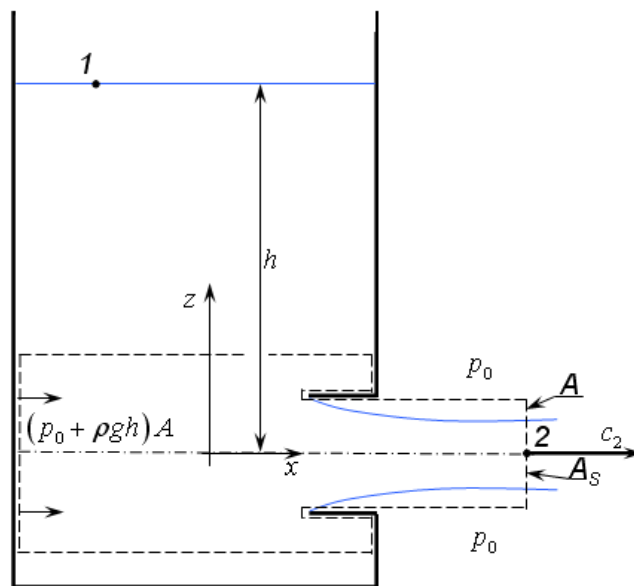
$$\mathbf{F} = -\mathbf{T} \Rightarrow F_x = -T_x = -127 \text{ [N]}. \quad (11.22)$$

Az áramlásban az impulzus tétel alkalmazása általában akkor szükséges, ha a feladatban energia be- vagy elvezetés van. Ebben, a viszonylag egyszerű feladatban a levegő kilépő összenergiája kisebb, mint a belépő energia, mivel az ejtőernyő modell energiát emészt fel. A feladatban csak az impulzus tételt, a folytonosság törvényét és a hidrosztatika alapegyenletét alkalmaztuk, itt a Bernoulli egyenletre nem volt szükség.

Általánosságban persze az anyagmegmaradás, a mozgásmennyiség megmaradás és az energia megmaradás elvét is fel kell használni – példa lehet erre a 13. pontban bemutatott, hajócsavar, illetve légcső valamint szélkerékre vonatkozó vizsgálat.

## 11.2 A Borda féle (éles szélű) kifolyónyílás

Tekintsük az alábbi ábrán vázolt tartályt, melyből ideális közeg folyik ki. A kifolyási sebesség a Bernoulli egyenlet felhasználásával egyszerűen számítható. Ez tulajdonképpen egyúttal példa is ennek az egyenletnek az alkalmazására. A Bernoulli egyenlet alkalmazásakor gyakran szükséges koordináta rendszer (itt: 11.5 ábrán az „ $x$ - $z$ ” koordináta rendszer). Szükség van továbbá (legalább) két pont választására – ezek itt az „1” és „2” pontok.



11.5. ábra – Borda féle, éles szélű kifolyónyílás

A 11.5 ábrán látható egy igen egyszerű alkalmazási példa, hiszen (7.19) hat tagja közül mindössze kettő marad az egyenletben, ezeket kiírva a (11.23)-at kapjuk:

$$\left[ \frac{c^2}{2} \right]_1^2 + [U]_1^2 = 0 ; \quad (11.23)$$

Feltesszük, hogy a 11.5 ábrán látható 1-es pontban a sebesség jó közelítéssel nulla. Ekkor (11.23) a következő módon írható:

$$\left[ \frac{c_2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] + [0 - U_1] = 0 \Rightarrow \frac{c_2^2}{2} - gh = 0 \Rightarrow c_2 = \sqrt{2gh} ; \quad (11.24)$$

A kifolyó közeg keresztmetszetének kiszámítása érdekében szükség van az impulzus tételre is. Ezzel ez egy olyan minta-feladat is, amelyben a Bernoulli egyenlet és az impulzus tétel együtt alkalmazandó.

Válasszuk a 11.5 ábrán szaggatott vonallal jelölt ellenőrző felületet. Feltesszük, hogy a tartály közel végtelen, tehát a közeg belépő sebessége közel nulla, illetve, pontosabb vizsgálatnál is feltehető lenne, hogy ez a sebesség „z” irányú. Az impulzus tételt az „x” tengely irányában célszerű (és kell) felírni. A részleteket az előző feladatban már bemutattuk, itt csak a végső alakot írjuk fel. Ebben a bal oldalon az időegységre eső, kilépő mozgásmennyiség áll; a jobb oldalon pedig a nyomásból származó erők szerepelnek csak, mert a térerősség hatása elhanyagolható és az ellenőrző felületben nincs idegen test:

$$\rho c_2^2 A_s = (p_0 + \rho g h) A - p_0 A ; \quad (11.25)$$

Végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket és helyettesítsük be az impulzus tételbe a Bernoulli egyenletből kapott kifolyási sebességet:

$$\rho c_2^2 A_s = \rho \frac{c_2^2}{2} A \Rightarrow A_s = A/2 ; \quad (11.26)$$

A tényleges sugár keresztmetszet ( $A_s$ ) és a kilépő geometriai keresztmetszet ( $A$ ) hányadosaként definiálható a kontrakciós tényező:

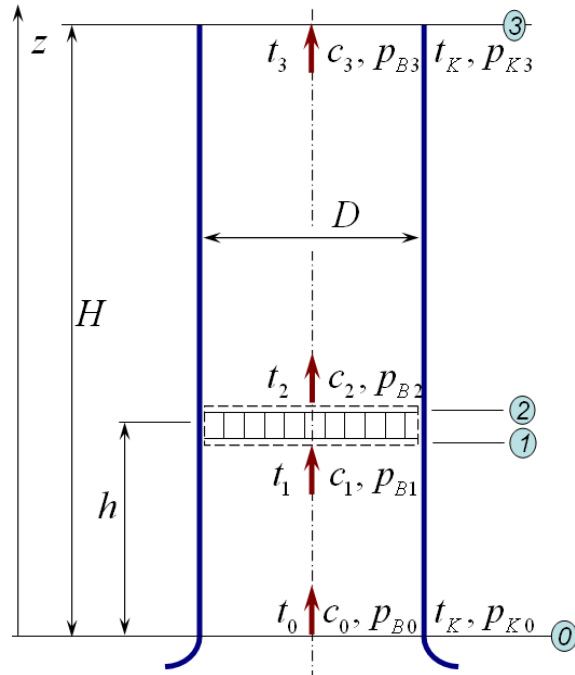
$$\xi = \frac{A_s}{A} ; \quad \text{a Borda féle kifolyónyílás esetében} \quad \xi = 0.5 ; \quad (11.27)$$

A kontrakciós tényezőt az áramlástan más területein is használják: ilyen alkalmazás pl. a mérőperemek este – ezeket a tantárgyhoz tartozó laboratóriumi méréseken ismertetjük.



### 11.3 Hűtőtoronybeli áramlás vizsgálata

Az impulzus tétel és a Bernoulli egyenlet együttes alkalmazására tekintsünk még egy, érdekes példát. (Ezzel kicsit megelőlegezzük a 12. fejezet ismeretanyagát, bár ott az összetettebb Bernoulli egyenletes feladatok megoldásának ismertetése a cél.) Tekintsünk el az áramlási veszteségektől, azaz, az eddigieknek megfelelően számoljunk ideális közeggel. A *feladat*: határozzuk meg a hűtőtoronyban kialakuló tömegáramot!



11.6. ábra – Hűtőtorony vázlatja

A 11.6. ábrán egy hűtőtornyot vázoltunk, A hűtőlevegő a „0” szinten lép be, az „1” és „2” között a hűtőrácson a hűtendő közeg által leadott hőt, majd a „3”-as szinten kilép a hűtőtoronyból.

A feladat megoldásához adatok és feltételek megadása szükséges. Legyenek ezek a következők:

$$H = 30 \text{ m}; \text{ és } h = 5 \text{ m};$$

$$D = 3 \text{ m};$$

$$t_K = 0 \text{ } ^\circ\text{C} = 273 \text{ } ^\circ\text{K}; \text{ (azaz a külső hőmérséklet legyen állandó);}$$

$$t_0 = t_1 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}; \text{ (a belépő hűtőlevegő hőfoka a rácsig nem változik);}$$

$$t_2 = t_3 = 50 \text{ } ^\circ\text{C}; \text{ (a hűtőlevegő a rácson felmelegszik, a hőfoka}$$

ezután tovább már nem változik);

$$p_{K0} = 10^5 \text{ N/m}^2;$$

Határozzuk meg először a környezeti (és egyúttal a belépő) levegő sűrűségét:

$$\rho_K = \rho_{B0} = \rho_{B1} = \frac{p_{K0}}{R_{lev} T_K} = \frac{10^5}{287 \cdot 273} \cong 1.276 \text{ kg/m}^3; \quad (11.28)$$

Mivel a környezeti hőmérséklet nem változik, ezért ez a környezeti levegő sűrűsége állandó. Hasonlóképpen állandó – és a fenti értékkel adott – a hűtőlevegő sűrűsége is, a 0-1 szakaszon.

Folytassuk a sűrűség számítást: határozzuk meg a hűtőlevegő sűrűségét a 2-3 szakaszon. Ez szintén állandó, bár az előbbiektől természetesen különböző érték:

$$\rho_{B2} = \rho_{B3} = \frac{p_{K0}}{R_{lev} T_2} = \frac{10^5}{287 \cdot (273 + 50)} \cong 1.079 \text{ kg/m}^3; \quad (11.29)$$

A következő lépésben határozzuk meg a környezeti levegő nyomásának változását, a magasság ( $z$ ) függvényében. Ez a hidrosztatika (8.4) alapegyenletének értelemszerű alkalmazásával, igen egyszerűen lehetséges:

$$p_K(z) = p_{K0} - \rho_K g z = 10^5 - 1.276 \cdot 9.81 \cdot z = 10^5 - 12.52 \cdot z; \quad (11.30)$$

A külső levegő és a hűtőlevegő (belső levegő) nyomása a belépésnél és a kilépésnél kapcsolódik egymáshoz. Ezek a megoldásban rész-perem feltételek.

Írjuk fel először a belépésnél lévő kapcsolatot, a Bernoulli egyenlet fent bevezetett, igen egyszerű alakja (11.23) segítségével:

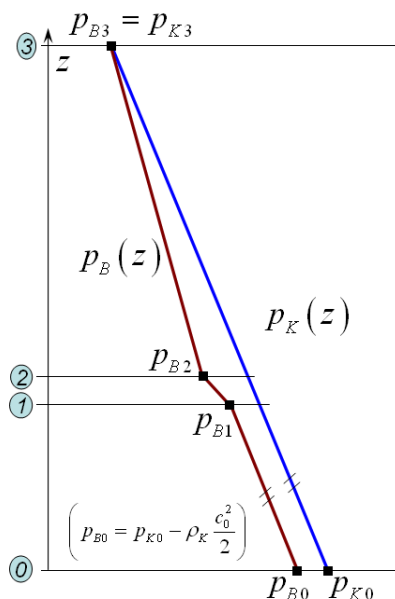
$$\frac{p_{B0}}{\rho_{B0}} + \frac{c_0^2}{2} = \frac{p_{K0}}{\rho_K} \Rightarrow p_{B0} = p_{K0} - \rho_K \frac{c_0^2}{2} = 10^5 - 1.276 \frac{c_0^2}{2}; \quad (11.31)$$

A (11.31) azt jelzi, hogy a belépő statikus nyomás függ a belépő sebességtől, vagyis pillanatnyilag csak ennyit tudunk felírni, a konkrét érték később, a sebesség meghatározása után számítható.

Egyszerűbb a helyzet a kilépésnél, ahol, lévén a kilépő hűtőlevegő szabad sugár a két statikus nyomás azonos:

$$p_{B3} = p_{K3} = 10^5 - 12.52 \cdot 30 \cong 99624 \text{ N/m}^2; \quad (11.32)$$

Vagyis a környezeti levegő statikus nyomása, ezen a 30 méteres magasságon  $376 \text{ N/m}^2$ -tel csökken. Ezek alapján – a sebességet egyenlőre ismeretlennek tekintve felvázolhatjuk a nyomások magasság szerinti változását.



11.7. ábra – Nyomásváltozás a hűtőtoronyban

A 11.7. ábráról látható, hogy a környezeti levegő nyomása, (11.30)-nak megfelelően egyetlen (ferde) egyenessel ábrázolható. A hűtőlevegő nyomása ugyanakkor a 0-1 szakaszon a környezeti levegő nyomásával párhuzamosan fut, a különbséget a (11.31)-ben határoztuk meg.

Azt is megállapíthatjuk, hogy a nyomáscsökkenés meredeksége a 2-3 szakaszon a kisebb sűrűség miatt kisebb.

A hűtőrácsra, ahol a hűtőlevegő felmelegszik, a hőmérséklete tehát megnő – így a sűrűsége lecsökken és az áramlási sebesség megnő, ezen a rövid szakaszon viszonylag nagy statikus nyomáscsökkenés következik be.

Végeredményben a hűtőlevegő nyomásváltozása a „ $p_B(z)$ ”, három részből álló, törött vonallal közelíthető (11.7. ábra, bal oldali törött vonal).

A nyomások számításának folytatásához írjuk fel a folytonosság törvényét:

$$\dot{m} = \rho_i A c_i \text{ kg/m}^3; \quad \text{ahol } i = B0, B1, B2, B3; \quad (11.33)$$

Mivel a 0-1 szakaszon a sűrűség nem változik, ott a sebesség sem változik, azaz  $c_0 = c_1$ ; és hasonlóképpen változatlan a sebesség a 2-3 szakaszon is:  $c_2 = c_3$ . Természetesen, az 1-2 szakasszal is számolni kell majd, erre a szakaszra az alábbi összefüggés írható fel:

$$\rho_{B1} c_1 = \rho_{B2} c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{\rho_{B2}}{\rho_{B1}} c_2 \cong 0.845 c_2; \quad (11.34)$$

Kimondható tehát, hogy a hűtőrácsra áthaladó hűtőlevegő sebessége kereken a duplájára növekszik.

Számoljuk ki a hűtőlevegő statikus nyomását az 1-es pontban. Ez ismét a Bernoulli egyenlet legegyszerűbb alakjának alkalmazásával lehetséges:

$$\frac{p_{B1}}{\rho_{B1}} + \frac{c_1^2}{2} + gh = \frac{p_{B0}}{\rho_{B0}} + \frac{c_0^2}{2} \Rightarrow p_{B1} = p_{B0} - \rho_{B0} gh; \quad (11.35)$$

Ezt, (11.30)-at is figyelembe véve átírhatjuk:

$$p_{B1} = p_K - \rho_K gh - \rho_K \frac{c_0^2}{2} \cong 10^5 - 62.6 - 1.276 \frac{c_0^2}{2}; \quad (11.36)$$

Számoljuk ki a hűtőlevegő statikus nyomását a 2-es pontban. Ez az impulzus tétel segítségével lehetséges, mert itt hő-bevezetés van, ebben az esetben pedig Bernoulli egyenletet nem szabad felírni – illetve csak úgy lenne szabad, ha ismernénk az átadott hőmennyiséget. A feladatban csak a hőmérsékletnövekedés adott – tehát az impulzus tételt kell felhasználni.

Válasszuk ellenőrző felületnek a 11.6. ábrán szaggatott vonallal körülhatárolt tartományt (ez lényegében a teljes hűtőrácsot magában foglalja) és legyen a koordináta rendszer a „z” tengely (hiszen további tengelyekre nincs szükség). Akkor az impulzus tétel (7.10) „z” irányú komponens-egyenlete:

$$-\rho_{B1} c_1^2 A + \rho_{B2} c_2^2 A = p_{B1} A - p_{B2} A; \quad A = \frac{D^2 \pi}{4} = \text{áll.}$$

$$\Rightarrow p_{B2} - p_{B1} = \rho_{B1} c_1^2 - \rho_{B2} c_2^2 \cong 1.276 \cdot c_1^2 - 1.079 \cdot (0.845 \cdot c_1)^2$$

$$\Rightarrow p_{B2} - p_{B1} \cong -0.506 \cdot c_1^2 \quad \text{vagy} \quad p_{B2} \cong p_{B1} - 0.506 \cdot c_1^2; \quad (11.37)$$

Végül számoljuk ki a 3-as pontbeli hűtőlevegő nyomást. Erre ismét használhatjuk a Bernoulli egyenletet, hiszen itt már nincs hő bevezetés (vagy más energia be- vagy elvezetés):

$$\frac{p_{B2}}{\rho_{B2}} + \frac{c_2^2}{2} + gh = \frac{p_{B3}}{\rho_{B3}} + \frac{c_3^2}{2} + gH \Rightarrow p_{B3} = p_{B2} - \rho_{B2}g(H-h);$$

(hiszen  $\rho_{B2} = \rho_{B3}$  és  $c_2 = c_3$ )

$$\Rightarrow p_{B3} = p_{B2} - 1.079 \cdot 9.81 \cdot 25 \cong p_{B2} - 264.6; \quad (11.38)$$

A  $p_{B3}$ -at azonban már a (11.32)-ben kiszámítottuk, vagyis az értéke ismert. Írjuk be (11.38)-ba (11.37)-et:

$$p_{B3} \cong p_{B2} - 264.6 = p_{B1} - 0.506 \cdot c_1^2 - 264.6; \quad (11.39)$$

$$p_{B3} \cong p_{B1} - 0.506 \cdot c_0^2 - 264.6, \text{ mert } c_1 = c_0;$$

Írjuk be (11.39)-be (11.36)-ot, akkor:

$$p_{B3} \cong p_{B2} - 264.6 = 10^5 - 62.6 - 1.276 \frac{c_0^2}{2} - 0.506 \cdot c_0^2 - 264.6;$$

$$p_{B3} \cong 10^5 - 327.2 - 1.144 \cdot c_0^2;$$

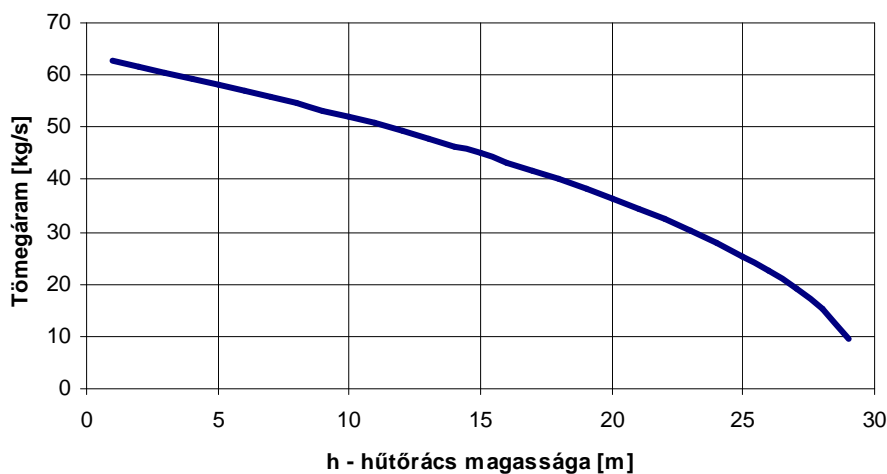
$$99624 \cong 99673 - 1.144 \cdot c_0^2; \quad (11.40)$$

Innen már kifejezhető a belépésnél adódó sebesség:

$$c_0^2 = (99673 - 99624) / 1.144 \Rightarrow c_0 \cong 6.54 \text{ m/s}; \quad (11.41)$$

Végeredményben meghatározható a hűtőtoronyban áramló hűtőlevegő tömegárama is:

$$\dot{m} = \rho_{B0} c_0 A = \rho_{B0} c_0 \frac{D^2 \pi}{4} = 1.276 \cdot 6.54 \cdot \frac{3^2 \pi}{4} \cong 59 \text{ kg/s}; \quad (11.42)$$



11.8. ábra – A tömegáram a hűtőrács magasságának függvényében

A számítást kissé kiterjesztve készítettünk egy rövid „Excel” számolást, hogy megmutassuk a hűtőrács elhelyezési magasságának a tömegáramra gyakorolt hatását. Látható, hogy az egyre magasabban elhelyezkedő hűtőrács esetén csökken a tömegáram, sőt a 11.7. ábra alapján belátható, hogy a 30 méteres legnagyobb geometriai magasság alatt lesz egy olyan magasság, ahol a tömegáram értéke nulla, illetve efelett nincs kiáramlás. (A példában ez a legnagyobb magasság nagyjából 29.6 méter.)

A 11.8. ábra alapján könnyen belátható, hogy miért helyezik el a hűtőrácsokat a lehető legalacsonyabban. Megjegyzendő, hogy a példa, a második részben tárgyalt sűrűdésos áramlásra vonatkozó ismeretekkel folytatható lenne, ezzel a valósághoz még közelebbi eredményre jutnánk.

Az impulzus tétellel kapcsolatos további feladatok [7] 13. „Sűrűdésmentes áramlás” című fejezetében, a 28. példától kezdődően olvashatók.

## 12. A Bernoulli egyenlet alkalmazása

Ismételjük meg az *energia megmaradás* elvére épülő Bernoulli egyenletet:

$$\int_1^2 \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[ \frac{c^2}{2} \right]_1^2 + [U]_1^2 + \int_1^2 \frac{dP}{\rho} - \int_1^2 (\mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c})^T \mathbf{ds} - \int_1^2 \mathbf{g}_H^T \mathbf{ds} = 0; \quad (7.14)$$

A (7.14) egyenlet ideális közeg olyan áramlására érvényes, ahol az áramlás két, kijelölt pontja között sem energia be- sem elvezetés nincs. A fenti egyenlet levezetése részletesebben pl. [5]-ben, annak 13.1 pontjában olvasható. Szintén [5]-ben, a 13.12 alpontban olvasható az az öt eset, amikor az áramlás örvényes ugyan, de (7.14) egyenlet bal oldalának két, utolsó tagja együtt zérus eredményt ad – vagyis ezekben az esetekben e két taggal nem kell számolni. Ezeket az eseteket itt nincs módunk részletesen ismertetni, csak megjegyezzük, hogy a jövőben, ebben a körben csak olyan feladattal foglalkozunk, amelyekben a két említett tag összege nulla. Példaként a legegyszerűbbet, az örvénymentes áramlást említjük. Ennek megfelelően a Bernoulli egyenlet általunk használt, legáltalánosabb alakja (örvénymentes áramlás potenciális erőterben) az alábbi:

$$\int_1^2 \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[ \frac{c^2}{2} \right]_1^2 + [U]_1^2 + \int_1^2 \frac{dP}{\rho} = 0; \quad (12.1)$$

Amennyiben pedig a sűrűség is állandó, akkor az alábbi formát kapjuk:

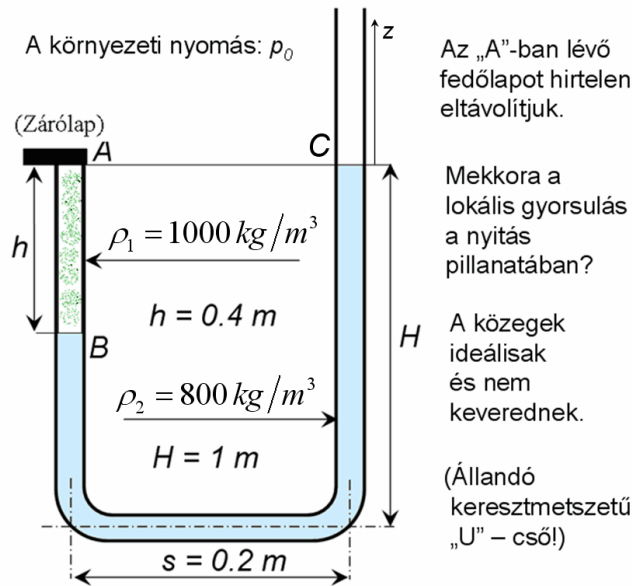
$$\int_1^2 \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[ \frac{c^2}{2} + U + \frac{P}{\rho} \right]_1^2 = 0; \quad (12.2)$$

Illetve, időben állandó áramlás esetén a Bernoulli egyenlet igen egyszerű, de gyakran használt alakját kapjuk:

$$\left[ \frac{c^2}{2} + U + \frac{P}{\rho} \right]_1^2 = 0; \quad (12.3)$$

A Bernoulli egyenlet segítségével igen sok feladat oldható meg. Egy rövid, egyszerű példát már be is mutattunk a 11. pontban. Ebben, a 12. pontban egy, az időben változó sebességű áramlásra vonatkozó feladatot oldunk meg, mivel ebben a feladat típusban van néhány, figyelemre méltó és megjegyzésre javasolt megoldási lépés.

A 12.1. ábrán látható egy állandó keresztmetszetű „U” cső, melyben két, nem keveredő folyadék található. A zárólap eltávolításának pillanatában gyorsuló áramlás indul meg. Az 5. pontban leírtak szerint ez lokális és egyúttal – az állandó keresztmetszet miatt – a teljes gyorsulás is. Elvileg ugyan az „U” cső két szakaszán, ahol a vízszintes és a függőleges szakaszok csatlakoznak létezik konvektív gyorsulás is – ez a sebesség irányváltozása miatt keletkező centripetális gyorsulás. Az ebből adódó nyomásváltozás a meginduló áramlás irányára merőleges, így ez számunkra elhanyagolható. Végeredményben tehát elegendő a lokális gyorsulással számolni.



12.1. ábra – U-csőben létrejövő, időben változó áramlás

A folytonosság törvénye szerint, állandó sűrűségű áramlás esetén igaz az alábbi összefüggés:

$$A_1 c_1 = A_2 c_2 = A c = \text{állandó} \quad (\text{itt "A" a cső keresztmetszete}). \quad (12.4)$$

Számítsuk ki a fenti kifejezés idő szerinti parciális deriváltját:

$$A_1 \frac{\partial c_1}{\partial t} = A_2 \frac{\partial c_2}{\partial t} = A \frac{\partial c}{\partial t} = A a = \text{állandó}. \quad (12.5)$$

Ezek szerint kimondható, hogy a lokális gyorsulás – állandó sűrűségű közeg, állandó keresztmetszetű csőben történő áramlása esetén – állandó; a keresztmetszet változása esetén pedig azzal fordítottan arányos.

Egyes, időben változó áramlások vizsgálatára a Bernoulli egyenlet megfelelő alakja (12.2) használható. Ennek, a gyakorlatban is fontos területnek teljesebb bemutatása érdekében oldjuk meg a 12.1 ábrán vázolt feladatot.

Rögtön megállapítható, hogy a zárólap eltávolításának pillanatában a közegek sebessége (még) nulla, a geometriai kép (még) nem változik és nyomás az „A” és a „C” pontban egyaránt  $p_0$ , azaz azonos a környezeti nyomással. Megállapítható az is, hogy – mivel az „AB” csőszakaszon elhelyezkedő folyadék sűrűsége nagyobb, mint a másik oldalon lévő, megfelelő folyadék-oszlop sűrűsége – a lokális gyorsulás „A”-tól „C” felé mutat, abszolút értéke mindenütt állandó.

A feladat megoldásához két, időben változó áramlásra vonatkozó Bernoulli egyenletet kell felírni. (Ez már onnan is belátható, hogy a feladatban két közeg szerepel!) Az egyik Bernoulli egyenletet az „A” ponttól a „B” pontig, a másikat a „C” ponttól a „B” pontig írhatjuk fel:

$$\int_A^B \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[ \frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right]_A^B = 0; \quad (12.6)$$

És:

$$\int_C^B \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[ \frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right]_C^B = 0; \quad (12.7)$$

Rendeljük a nulla magasságot az „AC” vízszintes vonalhoz. Ekkor, mivel ebben a feladatban a nehézségi erőtér (és csak az) hat, a potenciál a következő módon írható fel:

$$U_A = U_C = 0; \quad \text{és} \quad U_B = -g h; \quad (12.8)$$

A nyomásokról, amint azt már részben leírtuk, megállapítható, hogy:

$$p_A = p_0 \quad p_C = p_0; \\ \text{és (természetesen)} \quad p_B \text{ mindkét irányból nézve azonos.}$$

Jelöljük a lokális gyorsulás értékét „ $\mathbf{a}$ ”-val. Ez vektor mennyiség, melynek irányát a korábbiakban már megállapítottuk. Számoljuk ki a lokális gyorsulásra vonatkozó integrálokat:

$$\int_A^B \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} = \int_A^B \mathbf{a}^T \mathbf{ds} = a h = 0.4 a \quad \text{és:} \quad (12.9) \\ \int_C^B \mathbf{a}^T \mathbf{ds} = -a [H + s + (H - h)] = -1.8 a;$$

Az első integrál értéke pozitív, mert a gyorsulás és az ívelem vektor értelme azonos, a közbezárt szög nulla fok, ezért a skalár-szorzat pozitív értéket ad. A második integrálban a gyorsulás vektor és az ívelem vektor értelme éppen ellentétes, azaz a közbezárt szög 180 fok – a skalár szorzat eredménye ezért negatív.

Az „A” ponttól a „B” pontig felírható Bernoulli egyenlet tehát (figyelembe véve, hogy a sebesség azonosan nulla):

$$0.4 a + [-g h - 0] + \left[ \frac{p_B}{\rho_1} - \frac{p_A}{\rho_1} \right] = 0 \quad (12.10) \\ \text{azaz:} \quad 0.4 a - g h + \left[ \frac{p_B}{\rho_1} - \frac{p_0}{\rho_1} \right] = 0;$$

Az „C” ponttól a „B” pontig felírható Bernoulli egyenlet pedig:

$$-1.8 a + [-g h - 0] + \left[ \frac{p_B}{\rho_2} - \frac{p_C}{\rho_2} \right] = 0 \quad (12.11) \\ \text{azaz:} \quad -1.8 a - g h + \left[ \frac{p_B}{\rho_2} - \frac{p_0}{\rho_2} \right] = 0;$$

Szorozzuk meg a (12.10)-et és a (12.11)-et a megfelelő sűrűségekkel. Tudjuk, hogy a „B” pontbeli nyomás mindkét közegben azonos. Ezek szerint írható fel (12.12)-vel adódó két egyenlet:

$$\rho_1 (0.4 a - g h) + (p_B - p_0) = 0; \quad (12.12) \\ \rho_2 (1.8 a + g h) + (p_0 - p_B) = 0;$$



A „B” pontbeli nyomás azonosságát kihasználva adjuk össze a két egyenletet:

$$\rho_1(0.4a - gh) + \rho_2(1.8a - gh) = 0; \quad \text{azaz} \quad (12.13)$$

$$a = \frac{gh(\rho_1 + \rho_2)}{1.8\rho_2 + 0.4\rho_1} = \frac{9.81 \cdot 0.4 \cdot 1800}{1.8 \cdot 800 + 0.4 \cdot 1000} \cong 3.84 \frac{m}{s^2};$$

A Bernoulli egyenlet számtalan, egyszerűbben megoldható áramlástan feladatban használható. Ezen, további feladatokra itt csak a figyelmet hívhatjuk fel: ennek a fontos egyenletnek a megértése, alkalmazásának megtanulása érdekében sok, ide vágó feladatot kell önállóan megoldani!

Az ebben a hűtőtorony modellben fontos szerepet játszó súrlódás hatása a kiterjesztett Bernoulli egyenlet alkalmazásával lenne lehetséges. A tantárgy második részében, a valóságos közegek áramlásának vizsgálatánál vezetjük majd be a kiterjesztett Bernoulli egyenletet. Már itt is hangsúlyozzuk, hogy a kiterjesztett Bernoulli egyenlet már nem a fenti, Bernoulli egyenlet, hanem annak egy olyan változata, átírása lesz, ahol az energia és munkavégző képesség mérlegbe a súrlódás által felemészített (a veszteségek miatt hővé alakult) energiát is figyelembe vesszük.

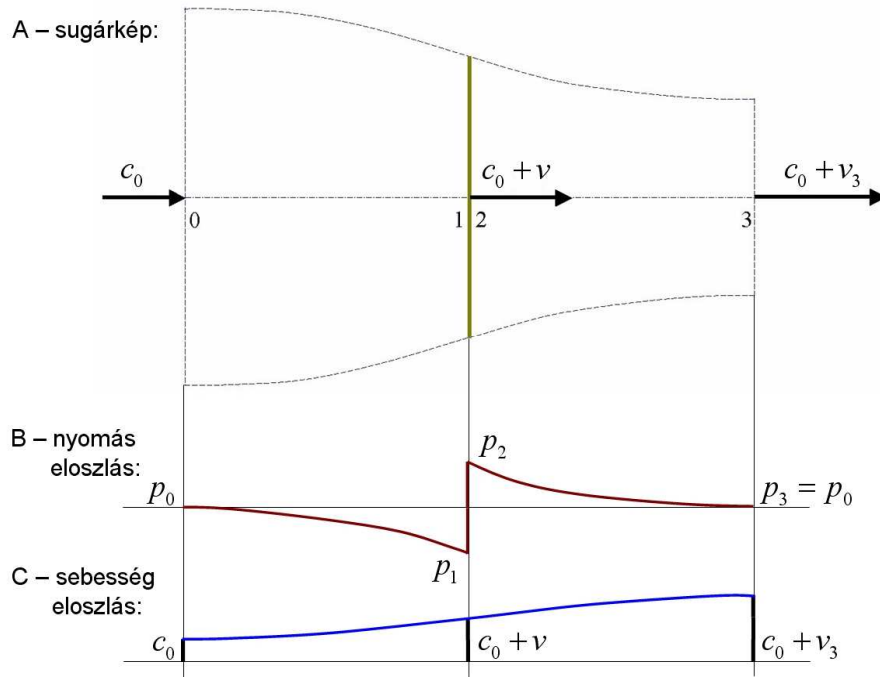
Hasonlóképpen terjeszthető ki a Bernoulli egyenlet például energia be- vagy elvezetéses folyamatokra is – ilyesmivel főként, szintén a második részben található, áramlástan gépek vizsgálatakor találkozhatunk.

Az Bernoulli egyenlettel kapcsolatos további feladatok találhatóak [7] 13. „Súrlódásmentes áramlás” című fejezetében (1-27. példa).

## 13. Légcsavar, hajócsavar és szélkerék

A légcsavar (hajócsavar) és a (vízszintes tengelyű) szélkerék két, nagyon elterjedten használt áramlástanai eszköz. Ezért foglalkozunk itt – bár a lehető legegyszerűbben, az un. sugár-elmélet alapján – ezekkel az eszközökkel.

A hajócsavar és légcsavar a hajók, illetve repülőgépek és egyéb eszközök (pl. légpárnás járművek) mozgatásához szükséges vonóerő (tolóerő) létrehozására szolgál. Működésének fizikai alapjai a 13.1 ábrán láthatók:

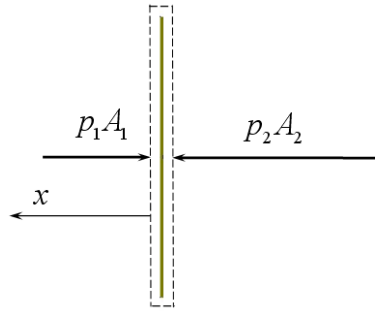


13.1. ábra – Hajócsavar – légcsavar sugárképe, nyomás- és sebesség eloszlása

Ezek az eszközök a rajtuk átáramló közeget – a befektetett motorteljesítménynek köszönhetően – hátrafele felgyorsítják. Ezen a módon érhető el az előre mutató, úgynevezett propulziós erő. Ez az erő az, ami a megfelelő járművet mozgatásához szükséges erőt biztosítja.

A 13.1. ábrának megfelelően a belépő közeg-jellemzők „0” indexet, a légcsavar sík előtti közeg-jellemzők „1” indexet, közvetlenül a sík mögötti jellemzők „2” indexet és végül a kilépő jellemzők „3” indexet kapnak.

A 13.1. és a 13.2. ábrán egy, úgynevezett „aktív tárcsa” látható: ez egy olyan tárcsa, amelynek felülete a hajócsavar szárnyak vagy a légcsavar lapátok által súrolt felület. A tárcsa előtt depresszió ( $p_1 < p_0$ ), mögötte túlnyomás ( $p_2 > p_0$ ) van. Feltesszük, hogy a tárcsa a sugarat nem forgatja meg. A nyomásnövekedés pontosan a bevezetett motorteljesítmény következtében áll elő. Ebben, a legegyszerűbb tárgyalásmódban a tárcsa vastagsága nulla, vagyis a nyomás ugrásszerűen növekszik meg. Nyomatékosan hangsúlyozandó, hogy a nyomás ugrásszerű változásának fizikai oka kell legyen: ez az ok a tárcsa. Ha ilyen fizikai ok nincs (pl. felület, lökéshullám), akkor a nyomás csak folytonosan változhat.



13.2. ábra – Aktív tárcsa

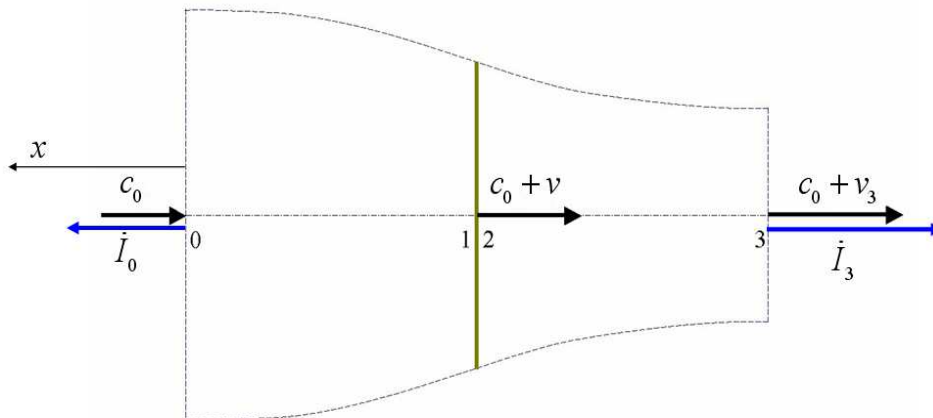
A 13.2. ábrán az impulzus tétel felírásához szükséges egyik lehetséges ellenőrző felület látható. A felület szorosan körülveszi a légszár-kört. Ezért ekkor az időegységre eső mozgásmennyiség változás vektorok a be- és kilépésnél azonos abszolút értékűek, de ellenkező értelműek, vektori összegük tehát nulla.

Az impulzus tétel „ $x$ ”-komponens-egyenlete a 13.2. ábrán vázolt ellenőrző felületre, a fentiekben leírt egyszerűsítések figyelembe vételével az alábbi formában írható fel:

$$0 = -p_1 A_1 + p_2 A_2 - T; \quad \text{innen:} \quad (13.1)$$

$$T = (p_2 - p_1) A; \quad (A_1 = A_2 = A = R^2 \pi);$$

Ez az egyenlet a „ $T$ ” vonóerőt határozza meg, a nyomáskülönbség alapján. Megjegyzendő, hogy a vonóerő, természetesen vektor mennyiség. Mivel ez a feladat egyméretű, az itt érvényes vektorok mind az „ $x$ ” tengellyel párhuzamosak, a vektor jelleg az előjelükben jut érvényre. Ez, ebben az esetben azt jelenti, hogy a pozitív előjel miatt az erő az „ $x$ ” tengely pozitív irányába mutat.



13.3. ábra – Ellenőrző felület és koordináta rendszer

A 13.3. ábrán az impulzus tétel felírásának másik lehetséges módja látható. Ebben az esetben – némi egyszerűsítéssel szólva – feltehető, hogy a környezeti nyomás az ellenőrző felületen mindenütt állandó – a felületi integrálja tehát nulla.

Az impulzus tétel „ $x$ ”-komponens-egyenlete erre az esetre:

$$\dot{I}_0 - \dot{I}_3 = -T; \quad \text{azaz:} \quad \dot{m} c_0 - \dot{m} (c_0 + v_3) = -T; \quad (13.2)$$

$$\text{tehát:} \quad T = \dot{m} v_3; \quad (\text{megjegyzés:} \quad \dot{m} = \rho R^2 \pi (c_0 + v));$$

A 13.1. vagy 13.3. ábra alapján két Bernoulli egyenlet írható fel: az egyik a nulla és egyes pont közé, a másik a kettes és hármas pont közé. Az egyes és kettes pont között energia bevezetés van, ezért oda egyszerű Bernoulli egyenletet felírni nem szabad. A két egyenlet:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{c_0^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{(c_0 + v)^2}{2}; \quad (13.3)$$

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{(c_0 + v)^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{(c_0 + v_3)^2}{2}; \quad (13.4)$$

Vonjuk ki (13.4)-ből (13.3)-at:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{(c_0 + v_3)^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} = \frac{2c_0v_3 + v_3^2}{2} = \frac{(2c_0 + v_3)v_3}{2}; \quad (13.5)$$

A fenti egyenletbe a nyomáskülönbség alapján beírható a vonóerő:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{T}{\rho R^2 \pi} = \frac{\dot{m} v_3}{\rho R^2 \pi} = (c_0 + v)v_3 = \frac{(2c_0 + v_3)v_3}{2}; \Rightarrow v_3 = 2v; \quad (13.6)$$

A (13.6) egyenlet végkövetkeztetése szerint a távoli indukált sebesség kétszerese a közelinek. Ez fizikailag azt jelenti, hogy a légszavár (hajócszavár) előtti nyomáscsökkenés ( $p_0 \Rightarrow p_1$ ) következtében jön létre a közeli indukált sebesség. Ezután, a bevezetett motorteljesítménynek köszönhetően a nyomás hirtelen megnövekszik ( $p_1 \Rightarrow p_2$ ). Mivel a légszavár síkja után kialakuló nyomás nagyobb az atmoszférikusnál, ez a nyomás lecsökken, miközben létrejön a „második” indukált sebesség, azaz végeredményben a távoli indukált sebesség.

Ez az eredmény csak ideális közeg áramlására érvényes és csak akkor, ha nem vesszük tekintetbe a légszavár-sugár forgását (amely forgás valóságos viszonyok között mindig létrejön). Az az állítás, ami szerint a távoli indukált sebesség a közeli kétszerese valóságos áramlásokban ugyan csak közelítőleg igaz, azonban – egyszerű, de jó közelítés lévén – nagyon sok kérdés tárgyalásakor alkalmazzák.

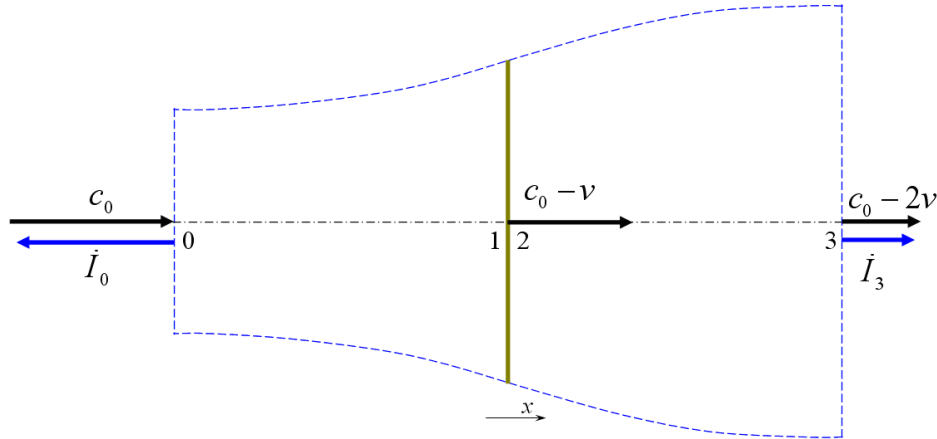
Vizsgáljuk meg a légszavár (hajócszavár) energia-viszonyait. Határozzuk meg azt a hatásfokot, amit a hasznos teljesítmény és a levegőnek átadott mozgási energia hányadosa alapján számíthatunk:

$$\eta_p = \frac{T c_0}{\dot{m} \left[ \frac{(c_0 + 2v)^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} \right]} = \frac{c_0 2v}{\frac{4c_0v + 4v^2}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{v}{c_0}}; \quad (13.7)$$

A (13.7) kifejezés a propulziós hatásfokot határozza meg. Ez a hatásfok rendkívül fontos, azt jelzi, hogy valamely erőt, adott zavartalan áramlási sebesség ( $c_0$ ) esetén a lehető legkisebb indukált sebességgel célszerű létrehozni. Ez azt jelenti, hogy a kis zavartalan sebesség esetén nagy légszavár átmérőt ajánlatos alkalmazni. A hajócszavaroknál a közeg víz – ennek sűrűsége a levegőnél több mint 800-szor nagyobb. A hajócszavaroknál tehát adott erőt jóval kisebb indukált sebességgel lehet létrehozni – ezért a hajócszavarok átmérője sokkal kisebb lehet. A propulziós hatásfok egy alap hatásfok, a légszavarok, hajócszavarok valóságos hatásfoka (összhatásfoka) ennél csak rosszabb lehet!

A hajócszárakkal kapcsolatban még megemlítenéd, hogy ezeknél a légszárakkal ellentétben a lapátok a teljes súrolt keresztmetszetet (esetleg még többet is) lefedik. Ezért, amíg a légszár lapátokat első közelítésben egyedülálló szárnyként is kezelhetjük, addig a hajócszár – részletesebb vizsgálat esetén – lapátrácsként számítandó.

A **szélkerék** működése során a rajta keresztuláramló levegőtől energiát vesz el. Ezért ezt a levegőtömeget a szélkerék lelassítja. Eközben, természetesen tengelyirányú erő is hat a szélkerékre – ez azonban csak a szélkerék és tartószerkezetének igénybevételét jelenti, hasznot nem hoz.



13.4. ábra – Szélkerék

A 13.4. ábrán a szélkerék körül kialakuló szágár képe látható. A távoli indukált sebesség itt – a (13.6) egyenlethez hasonló megfontolás alapján beláthatóan szintén a közeli kétszerese – a 13.4. ábrán már ezt tüntettük fel.

Számítsuk ki azt az energia-áramot (teljesítményt), amit a levegő a szélkeréken történő áthaladás közben lead:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{E} &= \dot{m} \left[ \frac{c_0^2}{2} - \frac{(c_0 - 2v)^2}{2} \right] = \rho R^2 \pi (c_0 - v) \left[ \frac{c_0^2}{2} - \frac{(c_0 - 2v)^2}{2} \right] = \\ &= \rho R^2 \pi (c_0 - v)^2 2v; \end{aligned} \quad (13.8)$$

Ez a teljesítmény az indukált sebesség függvényében változik; határozzuk meg e változás szélsőértékeit:

$$\frac{\partial(\Delta \dot{E})}{\partial v} = -2(c_0 - v)2v + 2(c_0 - v)^2 = 0 \Rightarrow (c_0 - v)2(c_0 - 3v) = 0; \quad (13.9)$$

A (13.9) egyenlet nullával egyenlő, ha:

$$\begin{cases} c_0 = v; \\ c_0 = 3v; \end{cases} \quad (13.10)$$

Az első megoldás fizikai lehetetlenség: ebben az esetben a szél sebessége a szélkeréknél nullára csökkenne – vagyis a levegő nem áramolna át a szélkeréken. Másik oldalról nézve, messze a szélkerék mögött a szél sebessége – ebben az esetben – éppen az ellenkezőjére fordulna. Ez ha lehet, még inkább lehetetlen.

A második megoldás a keresett szélsőérték (ez a második derivált alapján, vagy a görbe felvázolásával könnyen belátható); ez tehát a fizikailag kivehető teljesítmény maximuma is. Ezzel a teljesítménnyel szokás az ún. Betz-féle hatásfokot definiálni:

$$\eta_{\text{BETZ}} = \frac{\Delta \dot{E}}{\rho c_0 R^2 \pi \frac{c_0^2}{2}} = \frac{\rho R^2 \pi \left( c_0 - \frac{c_0}{3} \right)^2 2 \frac{c_0}{3}}{\rho c_0 R^2 \pi \frac{c_0^2}{2}} = \frac{16}{27} \quad (13.11)$$

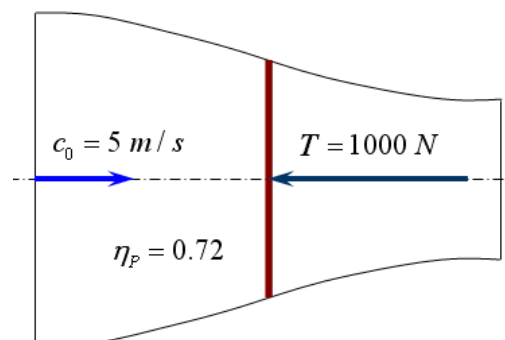
A (13.11) kifejezés számlálójába a (13.8) kifejezést írtuk, úgy, hogy a  $c_0 = 3v$  összefüggést behelyettesítettük. A nevezőbe a szélkerék felületének megfelelő felületen ( $R^2 \pi$ ), a zavartalan szélességgel ( $c_0$ ) érkező levegő energia-áramát írtuk. Ez tehát azt jelenti, hogy egy szélkerék a hozzá elméletileg érkező energiaáramból legfeljebb a Betz-féle hatásfoknak megfelelő hányadot képes hasznosítani. Ezért a szélkerekeknél relatív hatásfokról (a ténylegesen kivett teljesítmény és a Betz hatásfokkal csökkentett teljesítmény hányadosa) és abszolút hatásfokról is (a ténylegesen kivett teljesítmény és az érkező teljes energiaáram hányadosa) szokás beszélni.

A szélkerekekkel kapcsolatban meg kell még jegyezni, hogy az impulzus tétel alapján végzett, a fentiekben ismertetett számítások csak korlátozottan érvényesek. Amennyiben az indukált sebesség megközelíti a végtelen áramlási sebesség felét, akkor az áramlás lényegesen másképpen alakul, mint azt a 13.4. ábrán vázoltuk: örvényes zónák lépnek fel. Ennélfogva a megfontolások érvényüket veszítik – ilyen esetekben gyakran empirikus összefüggéseket alkalmaznak.

Az elméleti megfontolások másik korlátját az alacsony fordulatszám jelenti. A szélkerekek esetében a működési kerületi sebesség névleges állapotban, általában  $70 \text{ [m/s]}$ , nem túlságosan magas érték. (A helikopter rotorok rotorlapátvég kerületi sebessége névleges állapotban  $200 \text{ [m/s]}$ -körüli érték.) A szélkerék lapátok alacsony fordulatszáma esetén a lapátok nem fedik le a teljes súrolt felületet ( $R^2 \pi$ ), az érkező levegőáram egy, akár jelentős része is, sebességváltozás nélkül halad át ezen a keresztmetszeten. Ez pedig azt jelenti, hogy a teljes körfelület, mint feltétel nem tartható – emiatt, ezekben az esetekben a szélkerék méretezésben további korrekciókra van szükség.

## Mintafeladatok

A légcsavarok és hajócsavarok gyakorlati alkalmazása igencsak széleskörű, azonban ezek a feladatok általában jelentősen magasabb szintet képviselnek, mint az e tantárgyban megkívánt szint. Ezért csak egy nagyon egyszerű, bevezető jellegű feladatot mutathatunk be.



13.5. ábra – Hajócsavar

**Feladat:** a 13.5 ábrán egy hajócsavar vázlata látható. Állandó sűrűségű (összenyomhatatlan) közeg (víz) érkezik  $c_0$  sebességgel. A hajócsavar tolóereje 1000 N. Adott a propulziós hatásfok értéke (0.72). Kérdés a hajócsavar átmérője, a hasznos teljesítménye, illetve a víznek átadott (tehát a forgatáshoz legalább szükséges) teljesítménye?

**Megoldás:** A propulziós hatásfok (13.7) szerint számítható. Ebből a kifejezésből kiszámítható a közeli indukált sebesség:

$$v = \frac{c_0(1-\eta_p)}{\eta_p} = \frac{5(1-0.72)}{0.72} = 1.94 \text{ m/s}$$

A közeli indukált sebesség és a tolóerő között ad kapcsolatot (13.2). Innen a keresett átmérő már kiszámítható:

$$T = \dot{m}v_3 = \rho R^2 \pi (c_0 + v) 2v \Rightarrow R = \sqrt{\frac{T}{\rho \pi (c_0 + v) 2v}}; \quad (13.12)$$

azaz:

$$R = \sqrt{\frac{T}{\rho \pi (c_0 + v) 2v}} = \sqrt{\frac{1000}{1000 \pi (5 + 1.94) \cdot 2 \cdot 1.94}} \cong 0.109 \text{ m}; \quad (13.13)$$

tehát:  $D \approx 22 \text{ cm}$ ;

A hajócsavar hasznos teljesítménye (13.7)-ben lévő első tört kifejezés számlálója alapján számítható:

$$P_H = T c_0 = 1000 \cdot 5 = 5000 \text{ watt} = 5 \text{ kW}; \quad (13.14)$$

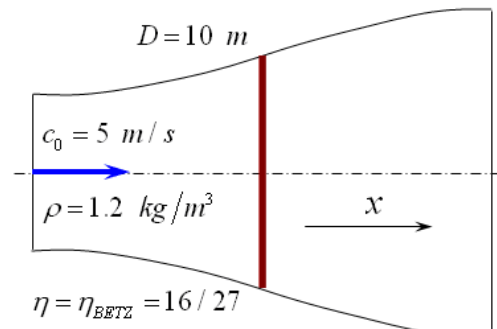
A víznek átadott teljesítmény ugyanezen tört nevezője szerint számítható:

$$P_V = \dot{m} \left[ \frac{(c_0 + 2v)^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} \right] = R^2 \pi (c_0 + v) \rho \left[ \frac{(c_0 + 2v)^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} \right]; \quad (13.15)$$

$$P_V = 0.108^2 \pi (5 + 1.94) 1000 \left[ \frac{(5 + 2 \cdot 1.94)^2}{2} - \frac{5^2}{2} \right] = 6.944 \text{ kW}; \quad (13.16)$$

Tekintsünk másodsorra egy szélkerékkel foglalkozó minta feladatot.

**Feladat:** A 13.6 ábrán egy szélkerék látható – a szélkerék éppen abban az állapotban működik, amikor a maximális teljesítményt adja le! A kérdés ez, a legnagyobb leadott teljesítmény, illetve az ekkor ébredő, tengely irányú erő.



13.6. ábra – Szélkerék

**Megoldás:** Az, hogy ez a szélkerék éppen ebben, a legkedvezőbb állapotban működik, onnan látható, hogy a tényleges hatásfoka egyenlő a Betz hatásfokkal. Ebben az állapotban azonban (13.10) alapján megállapíthatjuk, hogy a közeli indukált sebesség éppen a hozzááramlási sebesség harmada:

$$v = \frac{c_0}{3} = \frac{5}{3} \text{ m/s}; \quad (13.14)$$

A leadott teljesítményt legegyszerűbben a (13.11) kifejezésben található törtek számlálójából számíthatjuk ki:

$$\Delta \dot{E} = \rho R^2 \pi \left( c_0 - \frac{c_0}{3} \right)^2 2 \frac{c_0}{3} = 1.2 \cdot 5^2 \pi \left( 5 - \frac{5}{3} \right)^2 2 \frac{5}{3} = 1.05 \text{ kW}; \quad (13.15)$$

A tengely irányú erőt, a 13.4 ábra jelölései alapján, az impulzus tétel segítségével számíthatjuk ki. A számításhoz elegendő az „x” irány figyelembe vétele:

$$-\dot{I}_{0x} + \dot{I}_{3x} = -T \Rightarrow T = \dot{I}_{0x} - \dot{I}_{3x} = \dot{m} [c_0 - (c_0 - 2v)]; \quad (13.16)$$

azaz:

$$T = \rho R^2 \pi (c_0 - v) \cdot (2v) = 1.2 \cdot 5^2 \pi \left( 5 - \frac{5}{3} \right) \left( 2 \frac{5}{3} \right) \cong 1047 \text{ N}; \quad (13.17)$$

Az erő pozitívrá adódott: ez azt jelenti, hogy az értelme a pozitív „x” iránnyal megegyezik!

A 10 méter átmérő és az 5 m/s-os szélsősebesség nem kifejezetten kis érték – mégis, a leadott teljesítmény mindössze 1 kW, vagyis nem túl jelentős. Ehhez még hozzájárul az is, hogy ez a teljesítmény akkor áll rendelkezésre, amikor a szél fúj és nem feltétlenül akkor, amikor ténylegesen szükség lenne rá. Ezt a kérdést a szélkerekeknél valamilyen módon kezelni kell.

Másrészt könnyen belátható, hogy ha valóban jelentősebb teljesítményt kívánunk megvalósítani, akkor a szélkerék átmérőjét növelni kell. Esetünkben a 10-szeres növelés (tehát 100 m-es átmérő) 100-szoros teljesítményt (kb. 100 kW) jelent.



## 14. Összenyomható közegek áramlása

Elvileg minden közeg összenyomható, azonban a gyakorlatban sok esetben mégis összenyomhatatlan közeggel számolunk. Az összenyomhatatlanság megengedhető feltétel, ha az áramló közeg jellemzői emiatt csak legfeljebb néhány százalékot változnak. De ez mindig konkrétan eldöntendő kérdés: a döntési határ a számítás igényességétől függően változhat, változik.

Példaként említjük: a közegek összenyomhatósága jelentős szerepet játszik, ha az áramlási sebesség elég nagy (nagyobb, mint a hangsebesség megadott százaléka – mondjuk, ez a vizsgálat igényességétől függően lehet, 40, 50 vagy 60% -is). Hasonlóképpen fontos ha, a nyomás és sűrűség változás elég nagy. Ugyanúgy fontos az összenyomhatóság, ha nagyok az áramlásban fellépő gyorsulások, ha nagy a magasság-különbség, illetve ha nagy a hőmérséklet vagy koncentráció különbség.

Az összenyomható közegek áramlását jelen anyagban csak ideális folyadék (gáz) esetében vizsgáljuk. Az ilyen áramlásokat leíró egyenlet-rendszer:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{c}) = 0; \quad (7.4)$$

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \operatorname{rot} \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}; \quad (7.16)$$

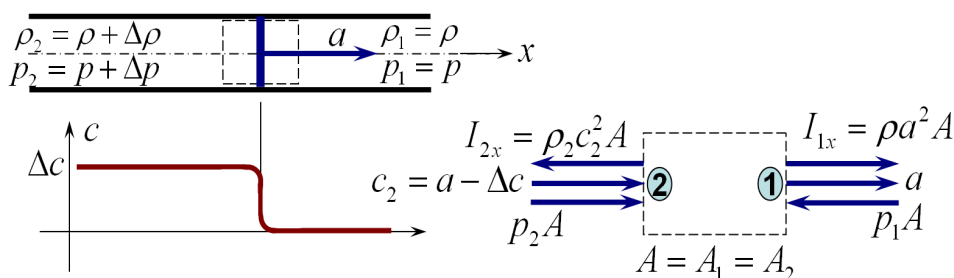
$$\frac{c^2}{2} + c_p T = c_p T_0 = \text{áll.} \quad (7.20)$$

$$\rho = \rho(p) \Rightarrow \text{pl. } \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll.} \quad (\text{barotróp közeg}); \quad (14.1)$$

$$p = \rho RT; \quad (14.2)$$

A fenti egyenletrendszer első tagja a folytonosság törvénye, a második az Euler egyenlet és a harmadik az energia egyenlet. Ezeket már korábban bevezettük – ezt jelzi az egyenlet száma is. A negyedik egyenlet megmutatja, hogy a sűrűség hogyan változik a nyomás függvényében. Itt csak izentropikus (ideális adiabatikus) állapotváltozásokkal foglalkozunk. E területen, komolyabb vizsgálatok esetében azért elég gyakran ennél tovább kell menni – pl. egy lökeshullám (kompresszióhullám) esetében az állapotváltozás nem izentropikus.

A közlekedésmérnöki gyakorlatban igen fontos a járművek – az összenyomhatóság tekintetében a repülőgépek – sebessége, illetve e sebesség hangsebességhez való viszonya.



14.1. ábra – Elemi hullám terjedési viszonyai

A 14.1. ábrán egy elemi hullám (pl. hanghullám) terjedési viszonyai láthatók. A hullám az elemi hullám (pl. hang) terjedési sebességével ( $a$ ) a pozitív „ $x$ ” tengely irányába mozog. Eközben az eredetileg nyugvó közeg sebessége a (hang)hullám mögött „ $\Delta c$ ” értékre növekszik. Ez, a növekmény általában – a (hang)hullámok tulajdonságainak megfelelően, igen kicsi. A hullám, a benne lévő energia következtében nem csak a sebességet, hanem a nyomást és a sűrűséget is (ugyancsak általában igen kismértékben) megnöveli. Ezeket a változásokat a 14.1 ábrán fel is tüntettük.

Írjuk fel az impulzus tételt a 14.1 ábra jobb oldalán vázolt ellenőrző felületre. Ennek az ellenőrző felületnek az elemi hullámmal együtt kell mozognia ahhoz, hogy a feladat stacionárius legyen. Ennek megfelelően az "1"-es pont a belépést, a "2"-es pont a kilépést jelzi. A nyugvó közeg belépő sebessége ekkor éppen az elemi hullám terjedési sebessége ( $a$  hangsebesség). Mint már korábban leírtuk: „ $\Delta c$ ” pozitív, ezért a kilépő sebesség „ $a - \Delta c$ ”. Az impulzus tétel felírásában csak az „ $x$ ” irány az érdekes:

$$\rho a^2 A - (\rho + \Delta\rho)(a - \Delta c)^2 A = -pA + (p + \Delta p)A; \quad (14.3)$$

Végezzük el a lehetséges átalakításokat. A másodrendűen kis tagokat elhanyagolva kapjuk, hogy:

$$2a\rho\Delta c - a^2\Delta\rho = \Delta p; \quad (14.4)$$

Írjuk fel a folytonosság törvényét:

$$(a - \Delta c)(\rho + \Delta\rho) = a\rho \Rightarrow \rho\Delta c = a\Delta\rho; \quad (14.5)$$

Helyettesítsük be (14.5)-öt (14.4) bal oldalának első tagjába és képezzük a  $\Delta p \Rightarrow dp$  és  $\Delta\rho \Rightarrow d\rho$  határátmenetet:

$$2a^2\Delta\rho - a^2\Delta\rho = \Delta p \Rightarrow a^2 = \Delta p / \Delta\rho \Rightarrow a = \sqrt{dp/d\rho}; \quad (14.6)$$

(14.6)-ból az elemi hullám (pl. hanghullám) terjedési sebességét számíthatjuk. Nem elemi hullámok keletkezése esetén ennél jelentősen nagyobb terjedési sebességek is előállhatnak.

Gáznemű közegben az elemi hullámok (a hanghullámok) esetében feltehető, hogy a létrejövő állapotváltozás izentrópiikus, azaz:

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rho^\kappa \Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \kappa \rho^{\kappa-1} = \frac{p}{\rho^\kappa} \kappa \rho^{\kappa-1} = \frac{p}{\rho} \kappa = \kappa RT; \quad (14.7)$$

Ezzel, az izentrópiikus állapotváltozás esetére érvényes hangsebesség gyakran alkalmazott kifejezését kapjuk:

$$a = \sqrt{dp/d\rho} = \sqrt{\kappa RT} \quad (\text{levegőre: } a \approx 20\sqrt{T}); \quad (14.8)$$

Az összenyomható közegek áramlásának jellemzésére gyakran használjuk a Mach számot. Ez a szám az áramlás sebességének és a hang sebességének viszonyozása:

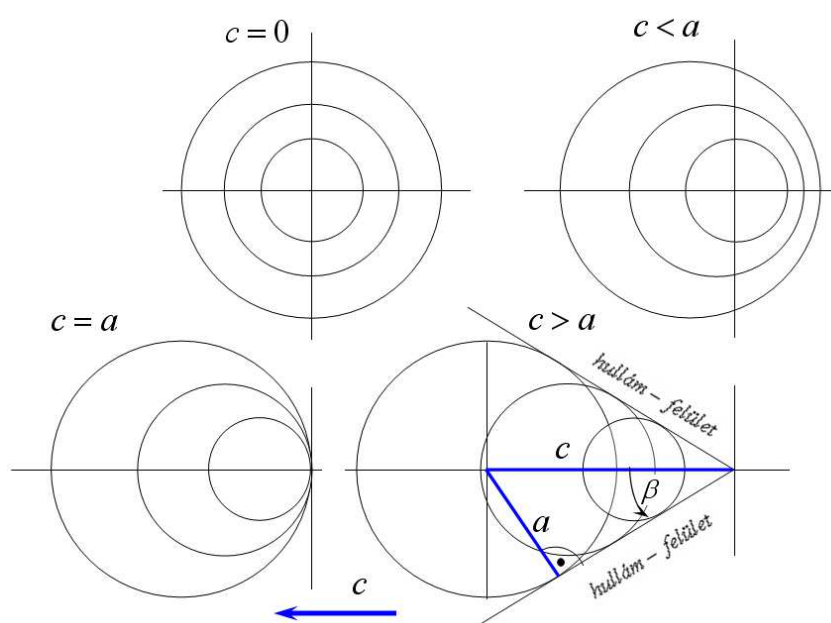
$$Ma = \frac{c}{a}; \quad (14.9)$$

Amikor a Mach szám egynél kisebb, akkor *szubszonikus* áramlásról beszélünk. Ha a Mach szám értéke egy körülüli, akkor az áramlás *transzszonikus*. Egynél nagyobb Mach számmal

jellemzett áramlás a *szuperszonikus* áramlás. Ha pedig a Mach szám sokkal nagyobb egynél (pl. nagyobb, mint 5, illetve molekula disszociáció történik), akkor ezt a helyzetet hangsúlyozandó az áramlást *hiperszonikus* jelzővel illetjük.

Az elemi hullámok az alapáramláshoz képesti terjedése fontos kérdés, ennek különböző esetei láthatók a 14.2 ábrán. A körök a (nyomás) hullámok terjedését mutatják, álló, illetve különböző sebességgel mozgó közegben. Az álló közegben a hullámterjedés az „ $a$ ”-val jelzett hangsebességgel, táguló koncentrikus körökben történik. A 14.2 ábra felső sorában balra az álló, jobbra a mérsékelt sebességgel áramló közegben kialakuló hullámkép látható. Az alsó sor jobb oldalán a pontosan hangsebességgel, a jobb oldalon a hangsebesség feletti sebességgel történő áramlásban létrejövő nyomásképet tüntettük fel.

A szubszonikus, tehát hangsebesség alatti sebességű áramlásban a hullámterjedést láttató körök az áramlás irányában hátrafele (felső sor, jobboldali ábra) mozdulnak el. Ez az elmozdulás annál nagyobb, minél jobban megközelíti a hangsebességet az áramlás sebessége.



14.2. ábra – Nyomáshullámok terjedése

Ennek a rész-ábrának az alapján válik érthetővé a Doppler hatás: a hozzánk közeledő hangforrásból (nyomáshullám) adott idő alatt több impulzust észlelünk – ez azt jelenti, hogy a hang frekvenciája megnövekszik (a hang magasabb lesz). A másik oldalon, a tőlünk távolodó hangforrásból (nyomáshullám) adott idő alatt kevesebb impulzust észlelünk, vagyis a hang mélyül.

A 14.2 ábra alsó sorában a bal oldali rész-ábra a hangsebességgel haladó zavarforrás körüli hullámképet mutatja. Mivel a zavarforrás – lehet ez egy repülőgép is – pontosan hangsebességgel halad, azért a nyomáshullámok előrefele nem távolodnak el, hanem egy helyen koncentrálódnak, azaz összegződnek. Az ilyen módon akár igen jelentősen is megnövekedett nyomással magyarázható a hangsebesség átlépésének környékén megjelenő hang-gát.

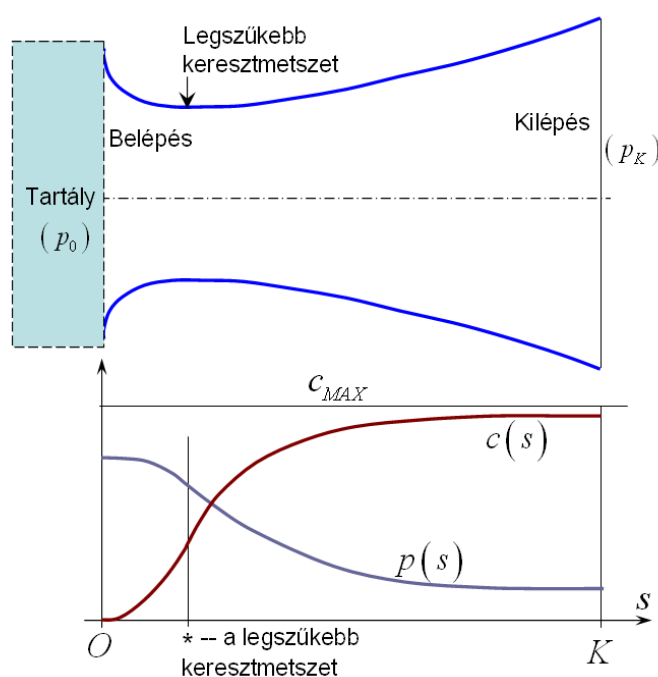
Az alsó sor jobboldali rész ábráján a hangsebesség feletti (szuperszonikus) áramlásban kialakuló képet láthatjuk. Ebben az esetben az áramlás két, élesen elválasztható tartományra oszlik: a zavarforrás hatása a „hullám-felület”-nek nevezett kúpon belül észlelhetők, ezen kívül nem keletkezik változás. Ez a szuperszonikus áramlások esetében egy fontos sajátosság. A kúpszöget a 14.2 ábra alapján – a zavarforrás „ $c$ ”- sebességgel, a zavarás „ $a$ ”- sebességgel halad – számíthatjuk:

$$\sin \beta = \frac{a}{c} = \frac{1}{Ma}; \quad (14.10)$$

## 14.1 Laval cső

Az összenyomható közegek áramlásának sajátosságait a **Laval-cső** példáján keresztül mutatjuk be. Ennek a szerkezetnek először csökken, majd nő a keresztmetszete – magát a szerkezetet a 14.3 ábra felső részén vázoltuk. Az itt következő vizsgálatunk *egyméretű* áramlásra vonatkozik.

A Laval-csőre talán a legközkeletűbb példa a rakéta-fűvóka. Itt, az égőtérben végbemenő égés után a nagy nyomású közeg a fűvócsövön átáramolva expandál, miközben a sebessége (nagyértékben) növekszik. A rakéta tolóereje ui. a kiáramló égéstermék tömegárama mellett a kiáramlási sebességgel arányos. A nyomáscsökkenési és sebesség növekedési folyamat látható a 14.3. ábra alsó részén.



14.3. ábra – Laval cső – sebesség és nyomás-lefutás

A Laval-csőben végbemenő áramlás vizsgálatához induljunk ki a folytonosság törvényének (7.3) szerinti alakjából. A kiinduló kifejezés teljes differenciálját képezve kapjuk:

$$\rho A c = \text{áll.} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0; \quad (14.11)$$

Írjuk fel továbbá az Euler egyenlet (7.16) egyméretű áramlásra vonatkozó, a térerősséget nem tartalmazó alakját, teljes differenciál formában:

$$c dc = c^2 \frac{dc}{c} = -\frac{1}{\rho} dp = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho = -\frac{1}{\rho} a^2 d\rho; \quad (14.12)$$

A fenti egyenlet felírásánál figyelembe vettük a hangsebesség (14.6) szerinti kifejezését is. Helyettesítsük vissza az Euler egyenletből kapott eredményt a folytonosság törvényének teljes differenciálként történt felírása alapján kapott egyenletbe:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = \frac{dc}{c}(1-M^2) + \frac{dA}{A} = 0;$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{c}(M^2-1) = \frac{dA}{A}; \quad (14.13)$$

A (14.13) kifejezés végeredménye alapján igen fontos következtetéseket vonhatunk le:

- ha  $M < 1$ , akkor  $\text{sgn}(dc) = -\text{sgn}(dA)$ , vagyis a közeg akkor gyorsul, ha a keresztmetszet csökken (és lassul, ha a keresztmetszet növekszik);
- ha  $M > 1$ , akkor  $\text{sgn}(dc) = \text{sgn}(dA)$ , vagyis a közeg akkor gyorsul, ha a keresztmetszet növekszik(!) (és lassul, ha a keresztmetszet csökken);
- ha  $M = 1$ , akkor  $dA = 0$  és  $dc \neq 0$ , vagyis a legszűkebb keresztmetszetben az áramlási sebesség éppen a helyi hangsebességgel (jele:  $a^*$  - a-csillag) egyenlő és mivel itt a keresztmetszet változás illetve az  $(1-M^2)$  egyaránt nulla, azért a sebességváltozás lehet nullától különböző – és valóban: a sebesség lefutásnak itt inflexiós pontja van. (Az inflexiós pontban a második derivált értéke nulla, az első derivált értéke nem nulla. Az ilyen pontban változik a görbület homorúról domborúra, vagy fordítva.)

A fenti elemzésből tehát az a fontos sajátosság derült ki, hogy az áramlások viselkedése a hangsebesség felett lényegesen különbözik a hangsebesség alatti viselkedéstől. Ezért, ahhoz, hogy a rakéta-fúvókában folytonos gyorsulást érzünk el, a keresztmetszetnek először csökkennie kell, majd a hangsebesség elérése után, a további gyorsulás érdekében növekednie kell. Ehhez természetesen az is szükséges, hogy az ellennyomás ( $p_K$ ) a tartálynomáshoz képest ( $p_0$ ) elegendően kicsi legyen.

Határozzuk meg a tartály-állapot és a csillaggal jelzett, un. kritikus keresztmetszet (ez azonos a legszűkebb keresztmetszettel) állapotjelzői közötti kapcsolatot. Induljunk ki az energia egyenletből:

$$c_p T_0 = c_p T^* + \frac{c^{*2}}{2} = c_p T^* + \frac{a^{*2}}{2} = c_p T^* + \frac{\kappa R T^*}{2}; \quad (14.14)$$

Fejezzük ki ebből az egyenletből a tartály hőmérséklet és a kritikus hőmérséklet viszonyát:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{c_p}{c_p + \frac{\kappa R}{2}} = \frac{2}{\kappa + 1}; \quad \kappa = 1.4 \text{ esetben } \frac{T^*}{T_0} = 0.833; \quad (14.15)$$

Fontos észrevenni, hogy a helyi hangsebesség – (14.6), illetve (14.8) alapján – a hőmérséklet változásával együtt változik. Határozzuk meg, hogy hogyan viszonyul egymáshoz a kritikus és a tartály hangsebesség:

$$a = \sqrt{\kappa R T} \Rightarrow \frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}};$$

$$\kappa = 1.4 \text{ esetben } \frac{a^*}{a_0} = 0.913; \quad (14.16)$$

A gyakorlat szempontjából a legfontosabb a tartálynyomás és a kritikus nyomás viszonya:

$$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{T^*}{T_0} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}; \quad \kappa=1.4 \quad \text{esetben} \quad \frac{p^*}{p_0} = 0.528; \quad (14.17)$$

Leggyakrabban a kritikus nyomásviszony alapján lehet megítélni, hogy egy áramlásban létrejön-e, létrejöh-e a hangsebesség, vagy az efeletti sebesség is. Nyilvánvalóan ennek a szükséges feltétele az, hogy a nyomásviszony kisebb legyen, mint a kritikus nyomásviszony:

$$\frac{p_K}{p_0} < \frac{p^*}{p_0}; \quad (14.18)$$

A Laval-cső fönt vázolt működésének tehát szükséges feltétele az, hogy a tartálynyomás a környezeti nyomáshoz viszonyítva elég magas legyen. Ha ez a feltétel teljesül, akkor kialakul a hangsebesség feletti áramlás. Ennek az áramlásnak további elemzését az Érdeklődő a szakirodalomban találhatja meg (pl. [4], [5], [6], [15]).

A 14.3 ábrán feltüntettük a maximális kiáramlási sebességet is ( $c_{MAX}$ ). Ezt a sebességet az energia egyenlethől számíthatjuk, úgy, hogy feltesszük, hogy a teljes tartály entalpiából mozgási energia lesz, azaz az összes, rendezetlen mozgás rendezett lesz:

$$c_p T_0 = \frac{c_{MAX}^2}{2} \Rightarrow c_{MAX} = \sqrt{2c_p T_0}; \quad (14.19)$$

A Laval-csőben kialakuló áramlásban tehát a kritikus keretmetszet jellemzői és a legnagyobb (elméleti) kiáramlási sebesség csak a tartályállapot és az anyagjellemzők függvénye. E tényeknek több szempontból is nagy a gyakorlati jelentősége.

Számítsuk ki egy Laval-csőből kilépő sugár sebességét:

$$c_p T_0 = \frac{c_K^2}{2} + c_p T_K \Rightarrow c_K = \sqrt{2c_p (T_0 - T_K)}; \quad (14.20)$$

A (14.20)-at, izentrópus kiáramlást tételezve fel, a következő módon is felírhatjuk:

$$\begin{aligned} c_K &= \sqrt{2c_p (T_0 - T_K)} = \sqrt{2c_p T_0 \left( 1 - \frac{T_K}{T_0} \right)} = \\ &= \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} R T_0 \left[ 1 - \left( \frac{p_K}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}; \end{aligned} \quad (14.21)$$

Laval csőhöz hasonló geometria – természetesen – más esetekben is előállhat. Ilyen lehet pl. egy lapátrács szűkülő-bővülő áramlási csatornája. Másrészt, csonka Laval csőnek tekinthetjük azokat a kiáramlási keresztmetszeteket, amelyek a legszűkebb keresztmetszetenél érnek véget (pl. egy szelep). Egy ilyen, pl. szelep esetében a kilépő keresztmetszet egyúttal a kritikus keresztmetszet is, ahol tehát a kritikus jellemzők állnak elő. Pl. a kilépési sebesség egyenlő lesz a (kritikus) hangsebességgel, ha csak a nyomásviszony a kritikusnál kisebb, vagy egyenlő.

## 14.2. A Bernoulli egyenlet és az összenyomhatóság

A Bernoulli egyenletet a 7. pontban vezettük be, általános alakja az összenyomható közegek áramlására is vonatkozik:

$$\int_1^2 \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[ \frac{c^2}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 (\mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c})^T \mathbf{ds} + [U]_1^2 + \int_1^2 \frac{d p}{\rho} - \int_1^2 \mathbf{g}_H^T \mathbf{ds} = 0; \quad (7.19)$$

A gázdinamikában (7.19)-nek általában csak a második és ötödik (utolsó előtti) tagját tekintjük (a többi tag ezekhez viszonyítva rendszerint elhanyagolható):

$$\left[ \frac{c^2}{2} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{d p}{\rho} = 0; \quad (14.22)$$

Ennek az egyenletnek a bal oldali második tagját – különböző típusú állapotváltozásokra – integrálni lehet. Tegyük fel, hogy az áramlás folyamán létrejövő állapotváltozások izentrópikusak. Ekkor a szóban forgó integrált a (14.7)-nél alkalmazott összefüggés segítségével számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{d p}{\rho} &= \int_1^2 \frac{p_1^{1/\kappa}}{\rho_1} \frac{d p}{p^{1/\kappa}} = - \frac{p_1^{1/\kappa}}{\rho_1} \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[ p^{(1-1/\kappa)} \right]_{p_1}^{p_2} = \\ &= - \frac{p_1^{1/\kappa}}{\rho_1} \frac{\kappa}{\kappa-1} p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] = - \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]; \end{aligned} \quad (14.23)$$

A (14.23) szerinti eredményt helyettesítsük vissza (14.22)-be (és helyettesítsük az általános gáztörvény szerint a nyomás és sűrűség hányadosát a gázállandó és az abszolút hőmérséklet szorzatával):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} \right] - \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] &= 0; \\ \Rightarrow c_2 &= \sqrt{c_1^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} RT_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}; \end{aligned} \quad (14.24)$$

Speciális esetként válasszuk az „1”-es pontot a 14.3 ábra „O” pontjával azonosnak (itt, a tartályban a sebesség nulla) és a „2”-es pontot a „K” ponttal azonosnak. Ebben az esetben a kiáramlási sebességre vonatkozó, korábban más úton levezetett (14.21) képletet kapjuk:

$$c_K = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_0 \left[ 1 - \left( \frac{p_K}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}; \quad (14.21)$$

A kiáramlási sebesség harmadik úton történő számításához induljunk ki a (7.21)-ből :

$$\frac{c^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \text{áll.} \quad (7.21)$$

(Legyen az index nélküli jellemzők indexe a „K” és a null-index pedig a „O”)

Ezzel:

$$c_K = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_K}{p_0} \right) \right]} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{T_K}{T_0} \right) \right]}; \quad (14.25)$$

Az így kiszámított kiáramlási sebesség – természetesen – azonos a (14.21)-ben már (korábban kétféleképpen is) kiszámított kiáramlási sebességgel. Ugyanerre a kiáramlási sebességre jutnánk (7.22) alkalmazásával is – ennek részletezésétől a kissé hosszadalmasabb számolás miatt itt eltekintünk. Az eredmények azonossága megmutatja, hogy ugyanarra az eredményre különböző (megengedett!) utakon is eljuthatunk.

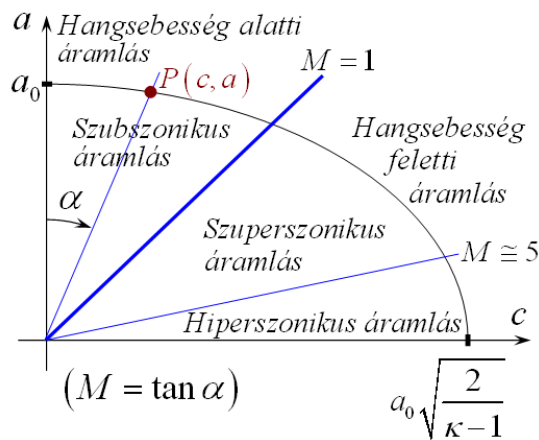
Vizsgáljunk egy áramlás lehetséges sebességeit a (7.22) kifejezés alapján:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1} = \frac{a_0^2}{\kappa-1}; \quad (7.22)$$

Osszuk el (7.22) bal oldalának mindkét tagját a jobb oldallal – akkor egy ellipszis egyenletéhez jutunk:

$$\left( \frac{c}{a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}}} \right)^2 + \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 = 1;$$

– amelyet a 14.4. ábrán ábrázoltunk is:



14.4. ábra – Sebességi ellipszis

A sebességi ellipszist feltüntető 14.4. ábrán a Mach szám (definíciója alapján könnyen belátható), hogy az éppen  $\alpha$ -val jelzett szög tangense. Eszerint a vastagabb (kék) vonallal kiemelt,  $45^\circ$ -os egyenes éppen az 1-es Mach számnak felel meg. Így felette, balra a hangsebesség alatti, jobbra alatta a hangsebesség feletti áramlás tartománya található. Az utóbbi tartományt további két részre osztja az 5 körüli Mach számot jelző vonal: felette a szuperszonikus, alatta a hiperszonikus áramlások találhatók. A hiperszonikus áramlásokban, a szuperszonikushoz képest további jellemző, hogy itt jelentős a gázmolekulák disszociációja is.

A maximális kiáramlási sebesség (14.19) szerinti kifejezését felírhatjuk (7.22) alapján is – figyelembe véve, hogy a nulla statikus hőmérséklethez nulla hangsebesség is tartozik:



$$c_{MAX} = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}}; \left( a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} = \sqrt{\kappa R T_0 \frac{2}{\kappa-1}} = \sqrt{2 \frac{\kappa R}{\kappa-1} T_0} = \sqrt{2 c_p T_0} \right)$$

És ez pontosan az a sebesség érték, ahol az ellipszis a vízszintes, „c” tengelyt metszi. Ez az ellipszis nagytengelye, hiszen a gyökjel alatti kifejezés értéke nagyobb, mint egy ( $\sim 2.236$ , ha  $\kappa = 1.4$ ).

Az ellipszis kistengelye éppen a nyugalmi állapothoz tartozó hangsebesség ( $a_0$ ) – ez a függőleges tengely és az ellipszis metszéspontja és ez a legnagyobb hangsebesség is. A nyugalmi állapotot gyakran tartály-állapotnak, vagy torlópontra, esetleg megállított értéknek is nevezik.

Hangsúlyozottan csak példaként tekintünk egy tartályból induló, gyorsuló áramlást. A tartályban lévő hőmérséklet (pl. 14.8 szerint) meghatározza az induló,  $a_0$  hangsebességet.

A közeg először a hangsebesség alatti sebességeken gyorsul – ez az ellipszis kezdeti szakasza. Ezen a szakaszon a sebesség nő (vagyis egy képzeletbeli pont az ellipszis mentén jobbra mozog), és a hangsebesség valamint ezzel együtt a hőmérséklet csak mérsékelten csökken.

A fent, példaként tekintett tartályból történő kiáramlás egy (megfelelő) Laval csövön keresztül valósulhat meg – e Laval cső legszűkebb keresztmetszeténél érjük el a hangsebességet. Ez az  $M = 1$  egyenes és az ellipszis metszéspontja.

Ezután érünk a szuperszonikus – hiperszonikus tartományba. A sebesség itt tovább növekszik, miközben a hangsebesség egyre rohamosabban csökken. Természetesen a hangsebességgel együtt csökken a statikus hőmérséklet is.

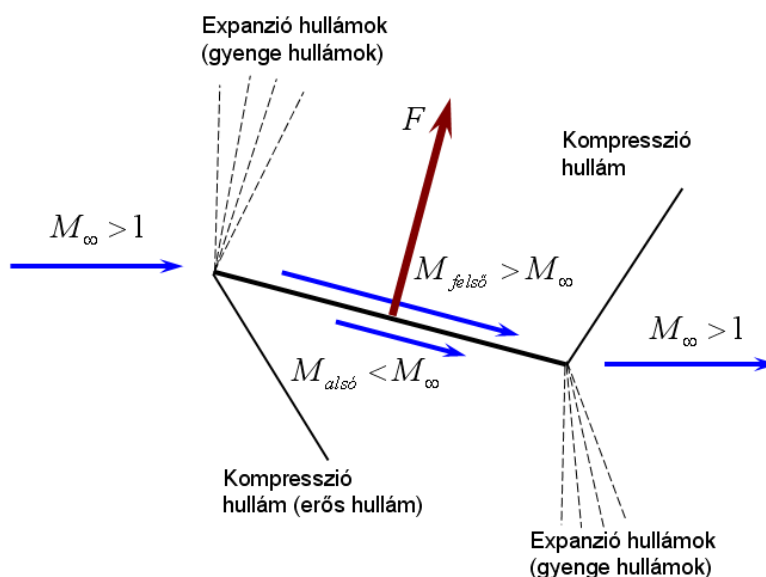
A hőmérséklet és a hangsebesség csökkenésével együtt növekszik a Mach szám. Mivel a legnagyobb kiáramlási sebességnél a hangsebesség nulla, azért itt a Mach szám értéke végtelen.

A nulla statikus hőmérséklet nulla statikus nyomást és – valamilyen, pl. izentrópius állapotváltozás alapján – nulla sűrűséget jelent. Mivel a kiáramlásban véges számú, éppen a maximális sebességgel rendezett mozgást végző részecske vesz részt, azért a kilépő felületnek a végtelenhez kell tartania (hogy a sűrűség értéke a nullához tarthasson).

### 14.3 Testek körül kialakuló szuperszonikus áramlás

A (14.13) kifejezéssel kapcsolatos megállapítások alapján bemutatjuk, hogy szuperszonikus áramlásba helyezett síklapon hogyan keletkezik a felhajtóerő. Az áramlást továbbra is súrlódásmentesnek tekintjük. A 14.5 ábrán látható, állásszöggel rendelkező síklapot hangsebességnél nagyobb sebességű ( $M_\infty$ ) megfűvás éri.

A síklap az áramlást két részre osztja. A felső rész bővülő keresztmetszetű, ott a közeg gyorsul. A gyorsulás expanzió hullámokon keresztül jön létre. Az expanzió egyúttal a hőmérséklet és emiatt a hangsebesség csökkenését is jelenti. Így az expanzió (gyenge vagy elemi) hullámok az ábrán vázolt módon önállóak maradnak és a gyorsulás entrópia növekedés nélkül megy végbe. A síklap végénél a felső áramlás szűkülő keresztmetszetű lesz, vagyis lassul. Ideális közeg esetén éppen az eredeti sebességre lassul vissza.

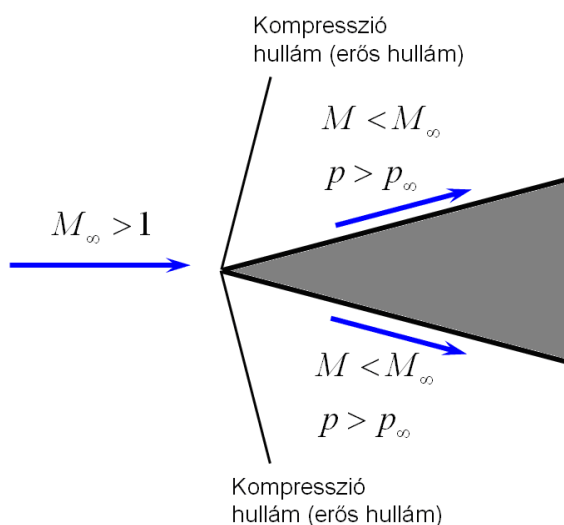


14.5. ábra – Síklap szuperszonikus áramlásban

A lassulás kompresszió hullámon keresztül jön létre – egy kompresszió hullám lényegében végtelen sok, egymásra torlódott elemi hullám összessége és ezért a rajta keresztül áramló közeg entrópiája véges értékkel növekszik, illetve más jellemzők is – pl. a hullámra merőleges sebesség összetevő – véges értékkel változik

A síklap alatt, a szűkülő keresztmetszet miatt a közeg egy kompresszió hullámon keresztül haladva lassul. A síklap hátsó élénél pedig expanzió hullámokon keresztül haladva gyorsul, ideális közeg esetében az eredeti sebességre. Ezzel a felső és alsó áramlás mintegy "találkozik", és az eredeti, zavartalan sebességgel (együtt) halad tovább.

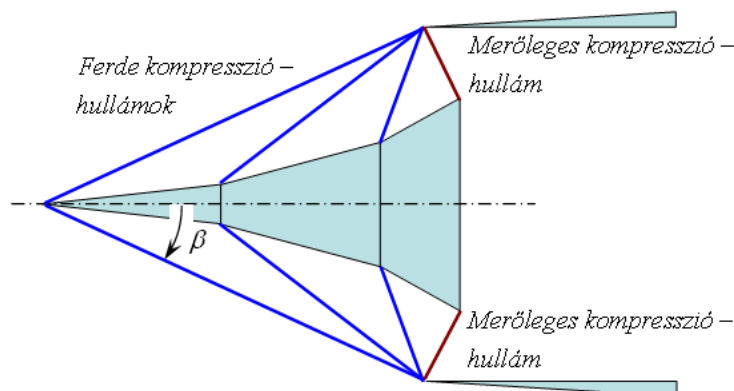
A síklap feletti, gyorsabb áramlás nyomása kisebb, az alsó, lassabb áramlás nyomása nagyobb lesz. Ennek, a síklap hossza mentén lényegében állandó nyomáskülönbségnek az eredménye a felhajtóerő ( $F$ ), amely a fenti síklapon keletkezik. A valóságos közegek áramlása esetén, a felhajtóerő mellett, természetesen ellenállás erő is keletkezik.



14.6. ábra – Külső sűrítésű diffúzor

A 14.6. ábrán látható áramlás egy, szuperszonikus áramlásba helyezett ék (vagy kúp) körül kialakuló (igen vázlatos) áramkép. A test az áramlás irányát megváltoztatja, szűkülő keresztmetszet jön létre, ahol a sebesség ennek megfelelően csökken, a nyomás pedig növekszik.

A sebesség csökkenésekor (lassuláskor) a közeg kompresszió hullámon keresztül halad, eközben nyilvánvalóan veszteség (és entrópia növekedés) is keletkezik, de a szerkezet, az alapvető funkciójának megfelelően a nagy sebességgel érkező közeget lefékezi, miközben a nyomását megnöveli. Az ilyen eszközt – amely eszköz sebesség-csökkenés árán nyomásnövekedést állít elő – diffúzornak, jelen esetben **szuperszonikus diffúzornak** nevezzük.



14.7. ábra – Hajtómű belépés

A gyakorlatban ilyen, külső sűrítésű diffúzort a nagysebességű – szuperszonikus – repülőgépek hajtóműveinek belépésénél alkalmaznak. Belátható, hogy a lassuláskor keletkező veszteség annál kisebb, minél több lépésben történik a sebesség csökkentése. Illetőleg az is cél, hogy a keletkező kompresszió hullámok egy ponton (rendszerint a hajtómű belépő nyílás külső peremén metszék egymást – 14.7. ábra.

A (14.10) kifejezés szerint ( $\sin \beta = a/c$ ) a kompresszió hullámok ferdeségére jellemző  $\beta$  szög úgy növekszik, ahogyan az áramlás sebessége ( $c$ ) tart a helyi hangsebességhez ( $a$ ). Másrészt egy-egy újabb hullám egy-egy újabb zavarástól indul. (A vázolt esetben a zavarást a kúposág változása, a felület törése jelenti.) Vagyis az újabb törések újabb lassuláshoz és egyre kevésbé ferde kompresszió hullámokhoz vezetnek.

A példaként vázolt három (egyre kevésbé ferde) kompresszió hullám után következik egy ún. „merőleges” kompresszió hullám: ez után a hullám után a közeg sebessége a hangsebesség alatti értékű lesz, előtte pedig még hangsebesség feletti volt – a hullámnál tehát a  $c = a$  reláció érvényes, illetve ennek megfelelően:  $\sin \beta = 1 \Rightarrow \beta = 90^\circ$  lesz. Ezért, illetve ilyen értelemben nevezzük ezt a hullámot merőlegesnek. Egyébként általában is igaz, hogy a hangsebességet merőleges hullámon keresztül lehet átlépni. (Erre példa a 14.2 bal alsó rész-ábrája is.)

A repülőgépeken egyébként a központi kúpos testet nagyobb sebességnél előre mozdítják, kisebb sebességnél hátrébb húzzák, azért, hogy a ferde hullámok a belépő nyílás külső pereméhez érkezenek.

## 14.4. Merőleges lökeshullám

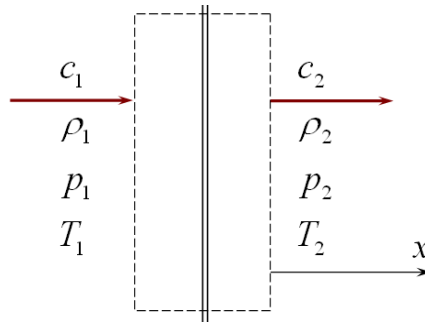
A merőleges kompresszió hullám esetén létrejövő áramlási viszonyok számításához induljunk ki az energia egyenlet (7.20) szerinti alakjából:

$$\frac{c^2}{2} + c_p T = c_p T_0 = \text{áll.} \quad (7.20)$$

Alakítsuk át ezt az egyenletet:

$$T_0 = T + \frac{c^2}{2c_p}; \text{ és mivel } c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1} R; \text{ ezért:}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{c^2}{2Tc_p} = 1 + \frac{c^2}{a^2} \frac{\kappa RT}{2T \frac{\kappa}{\kappa-1} R}; \Rightarrow T_0 = T \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right); \quad (14.26)$$



14.8. ábra – Merőleges kompresszió hullám

Legyen a 14.8. ábrán vázolt ellenőrző felület számításba veendő része egységnyi ( $A=1$ ). A merőleges kompresszió hullám jellemzőinek számításában felhasználjuk a folytonosság törvényét (14.27):

$$c_1 \rho_1 = c_2 \rho_2; \quad (14.27)$$

És az impulzus tételt (14.28):

$$-c_1^2 \rho_1 + c_2^2 \rho_2 = p_1 - p_2; \quad (14.28)$$

Továbbá az energia egyenletet (14.29):

$$T_{1t} = T_{2t} = T_t \Rightarrow \frac{c_1^2}{2} + c_p T_1 = \frac{c_2^2}{2} + c_p T_2; \quad (14.29)$$

A (14.29) energia egyenlet – adiabatikus viszonyokat feltételezve – azt fejezi ki, hogy a be- és kilépő energia azonos. A folytonosság törvénye, a hangsebesség egyenletének (14.8), az ideális gázra vonatkozó általános gáztörvénynek a felhasználásával az alábbi alakban írható:

$$\frac{p_1}{RT_1} M_1 \sqrt{\kappa RT_1} = \frac{p_2}{RT_2} M_2 \sqrt{\kappa RT_2}; \left( \rho = \frac{p}{RT} \text{ és } c = M a = M \sqrt{\kappa RT} \right); \quad (14.30)$$

Vezessük be a Mach számot az impulzus tétel kifejezésébe:

$$p_2 + c_2^2 \rho_2 = p_1 + c_1^2 \rho_1 \Rightarrow p_2 + c_2^2 \frac{\rho_2}{RT_2} = p_1 + c_1^2 \frac{\rho_1}{RT_1};$$

$$p_2 \left(1 + \frac{c_2^2}{RT_2}\right) = p_1 \left(1 + \frac{c_1^2}{RT_1}\right) \Rightarrow p_2 (1 + \kappa M_2^2) = p_1 (1 + \kappa M_1^2); \quad (14.31)$$

Az energia egyenlet (14.29) szerint a két, teljes hőmérséklet azonossága alapján, felhasználva (14.26)-ot, írható, hogy:

$$T_1 \{1 + [(\kappa - 1)/2] M_1^2\} = T_t = T_2 \{1 + [(\kappa - 1)/2] M_2^2\} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + [(\kappa - 1)/2] M_1^2}{1 + [(\kappa - 1)/2] M_2^2}; \quad (14.32)$$

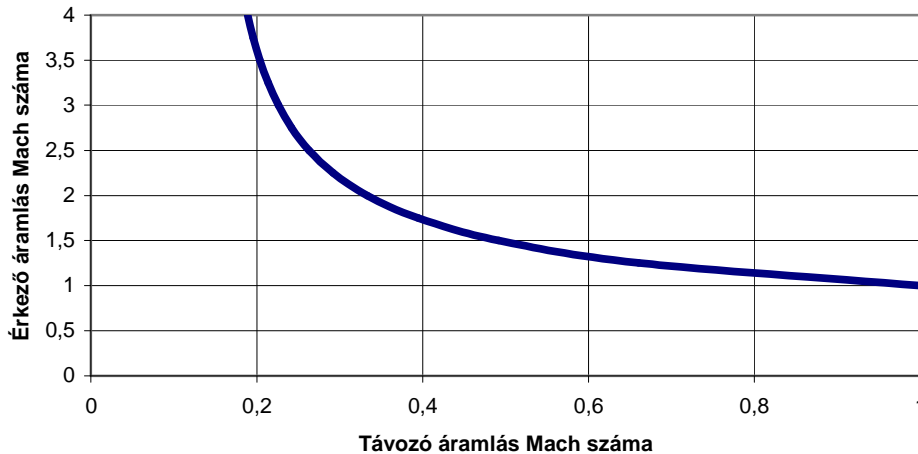
A (14.30), (14.31) és (14.32) felhasználásával eljutunk egy olyan összefüggésre, ahol már csak a Mach számok szerepelnek:

$$\frac{M_1}{1 + \kappa M_1^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2} = \frac{M_2}{1 + \kappa M_2^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2}; \quad (14.33)$$

A (14.33) nemlineáris egyenletnek két megoldása van, az első (triviális) megoldása az  $M_1 = M_2$  eset, ezt nem érdemes vizsgálni.

A második megoldás a gyakorlatban is fontos, ahonnan a merőleges kompresszió hullám előtti áramlás Mach számából a hullám utáni, hangsebesség alatti áramlásra érvényes Mach számot számíthatjuk ki:

$$M_2 = \frac{(\kappa - 1) M_1^2 + 2}{2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)}; \quad (14.34)$$



**14.9. ábra – Merőleges hullám előtti és utáni Mach számok**

A 14.9. ábráról látható, hogy az egyik szélső esetben, amikor az érkező áramlás pont hangsebességgel jön ( $M_1 = 1$ ), akkor a távozó áramlás Mach száma is 1 lesz – ebben az esetben semmi sem változik. Növekvő érkező Mach szám esetében viszont egyre kisebb lesz a távozó áramlás Mach száma – azaz a merőleges kompresszió hullám annál jobban lelassítja a közeget, minél gyorsabban érkezik. Ezzel együtt, a lassítás mértékének növekedésével az entrópia növekedés is, hatványozottan növekszik.

Számos áramlástan feladatban játszik jelentős szerepet a dinamikus nyomás, amelyet az összenyomható közegek áramlásakor a Mach szám és a környezeti nyomás segítségével is kifejezhetünk:

$$q = \rho \frac{c^2}{2} = \frac{p}{RT} \frac{c^2}{2} \frac{a^2}{a^2} = \frac{p}{RT} M^2 \frac{\kappa RT}{2} = \frac{\kappa}{2} p M^2; \quad (14.35)$$

Tekintsük az alábbi, igen egyszerű **példát**: Legyen a környezeti nyomás (a statikus nyomás) értéke  $101 \text{ kPa} = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ; és legyen a Mach szám 0.7. A feladat a dinamikus nyomás kiszámítása:

$$q = \frac{1.4}{2} 1.01 \cdot 10^5 \cdot 0.7^2 = 0.346 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 34.6 \text{ kPa};$$

Adott esetben a (14.35)-tel történő számolás sokkal egyszerűbb, különösen, ha figyelembe vesszük, hogy pl. a nagyobb sebességgel repülő repülőgépeken a statikus nyomás mellett a repülési Mach számot is mérik.

## 14.5. Összenyomható folyadék áramlása rugalmas csővezetékben

A következőkben a rugalmas anyagú csővezetékben áramló, összenyomható folyadékokban előálló nyomáshullámokkal foglalkozunk. Ez a jelenség elsősorban a hosszú csővezeték hirtelen zárásakor válik fontossá. Definiáljuk először a folyadékok térfogati rugalmasságát ([6] szerint):

$$E \equiv -\frac{\Delta p}{(\Delta V/V)} = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} \Rightarrow E = -V \frac{dp}{dV} \quad (14.36)$$

Tekintsük példaként a vizet, ennek térfogati rugalmassága:  $E_0 \cong 2.14 \cdot 10^9 \text{ [N/m}^2\text{]}$ .

Határozzuk meg a folyadékokban a hang sebességét. Induljunk ki a folytonosság tételéből:

$$m = \rho V \Rightarrow dm = d\rho V + \rho dV = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dV} = -\frac{\rho}{V} \quad (14.37)$$

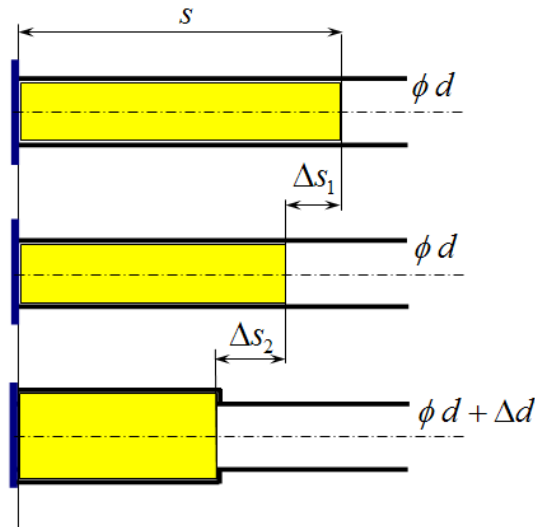
Helyettesítsük be ezt az eredményt (14.36)-ba:

$$E = -V \frac{dp}{dV} = -V \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dV} = -V a^2 \left( -\frac{\rho}{V} \right) = \rho a^2$$

innen:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \left( \text{vízre: } \sim 1463 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \right) \quad (14.38)$$

A következőkben egy hirtelen zárási folyamatot vizsgálunk meg. A 14.10. ábra felső részén a megállított folyadék-rész (színezve) látható, a középső részen a folyadék összenyomódása miatti rövidülést tüntettük fel és az alsó rész a cső tágulása miatti rövidülést láttatja.



14.10. ábra – Nyomáshullám rugalmas csőben

A fent vázolt folyamat hangsebességgel halad ugyan, de a hang terjedési sebességét a redukált rugalmassági modulus alapján írhatjuk fel, ahol a folyadék rugalmassága mellett a cső rugalmassága is szerepet kap. A redukált rugalmassági modulus kifejezése [6] szerint:

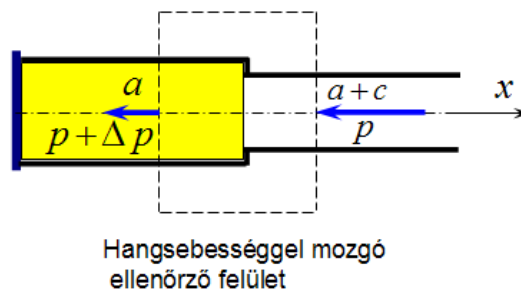
$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_{\text{folyadék}}} + \frac{d}{\delta} \frac{1}{E_{\text{cső}}} \quad (14.39)$$

( $d$  – a cső átmérője,  $\delta$  – a cső falvastagsága)

A hangsebesség pedig, szintén [6] szerint:

$$a = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{E_r}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{E_r}{\rho}} \quad \text{hacsak} \quad \frac{c^2}{4} \ll \frac{E_r}{\rho} \quad (14.40)$$

Ebben az esetben a legfontosabb a nyomásnövekedés nagyságának kiszámítása.



14.11. ábra – Nyomásnövekedés számítása

Válasszunk a 14.11. ábrán vázolt helyzetnek megfelelően egy olyan ellenőrző felületet, amely hangsebességgel mozog balra. Írjuk fel erre az ellenőrző felületre az impulzus tételt (tegyük fel, hogy a ki- és belépő keresztmetszet közelítőleg azonos):

$$\begin{aligned} \rho A(a+c)(a+c) - \rho A(a+c)a &= (p + \Delta p)A - pA \\ \text{mivel } \dot{m} &= \rho A(a+c) \\ \rho A(a+c)c &= \Delta p A \Rightarrow \Delta p = \rho(a+c)c \\ (\text{ha } c \ll a, \text{ akkor: } \Delta p &= \rho a c) \end{aligned} \quad (14.41)$$

A (14.38) kifejezés szerint, ha akár kisebb sebességű pl. vízáramlást hirtelen lefékezünk, akkor igen tekintélyes nyomáshullám állhat elő; tekintsük a következő példát:  $c = 10[m/s]$ , továbbá:

$$a := 1100[m/s], \rho = 1000[kg/m^3] \Rightarrow \Delta p = 110 \cdot 10^5 [N/m^2].$$

Az eredmény szerint, ebben az esetben az általában előforduló környezeti nyomás 110-szerese áll elő. Ez egy csővezetékre igen nagy igénybevételt jelent, ami gyakran nem is engedhető meg.

Annak, hogy ilyen nyomáshullám előálljon, szükséges feltétele a gyors zárás – vagyis a csővezetékben hangsebességgel terjedő zavaró hatásnak nem szabad elérnie a cső végét. Ha pl. 1100 m-es a cső hossza, akkor ez a „rövid” idő az ’ másodpercnél rövidebb idejű zárást jelenti. Ha azonban csak 1.1 m az aktuális csőhossz, akkor a zárási időnek 1/1000 másodpercnél kell rövidebbnek lennie.

A fentiek szerint a „gyors” zárás a hosszabb csöveknél érdekes – elég hosszú csővezeték esetén külön gondoskodni kell arról, hogy ez a hatás ne jöjjön létre. Gondolhatunk itt arra, hogy a hosszú csővezetéseken gyakran alkalmaznak olyan, csavarorsós működtetésű tolózárat, amelyek zárása a működési módjuk miatt eleve hosszú időt vesz igénybe.

## Mintafeladat

A [7] példatárban a 17. „Hullámjelenségek csővezetékben” c. fejezetben öt példa található, ebből a témakörből. A 18. „Gázdinamika” c. fejezet pedig tizenöt, gázdinamikai témájú feladatot tartalmaz. Ebben az előadás vázlatban egy, a repüléssel kapcsolatos mintapéldát mutatunk be.

**Feladat:** Egy repülőgép környezetében a környezeti hőmérséklet 220 K. A repülőn mérhető összhőmérséklet 320 K. Mekkora a repülési sebesség, illetve mekkora a repülési Mach szám? ( $c_p=1000 J/kg K$ ;  $R=287 J/kg K$ )

**Megoldás:** az összenyomható közegek áramlására vonatkozó energia egyenlet – (7.20) – fajhővel osztott alakja a következőképpen írható:

$$\frac{c^2}{2c_p} + T = T_0 \quad (14.42)$$

A (14.42) kifejezés bal oldalán az első tag az un. dinamikus hőmérséklet (közvetlenül nem mérhető). A baloldal második tagja a statikus hőmérséklet (ez az áramláshoz képest mozdulatlan, vagyis az áramlással együttmozgó hőmérővel mérhető). E két hőmérséklet összege a jobb oldalon álló összhőmérséklet (ez torlópont hőmérővel mérhető).



A feladatban környezeti hőmérsékletnek nevezett hőmérséklet a statikus hőmérséklettel azonos. Az összhőmérséklet és a statikus hőmérséklet ismeretében a dinamikus hőmérséklet (14.42) szerint számítható:

$$T_{din} = T_0 - T = 320 - 220 = 100 \text{ K}; \quad \text{itt} \quad T_{din} = \frac{c^2}{2c_p} \quad (14.43)$$

Innen a repülési sebesség könnyen számítható:

$$T_{din} = \frac{c^2}{2c_p} \Rightarrow c = \sqrt{2c_p T_{din}} = \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 100} \cong 447 \text{ m/s} \quad (14.44)$$

A repülési Mach szám meghatározásához ki kell számítani a környezeti levegőben terjedő hang sebességét. Ez (14.8) szerint számolható:

$$a = \sqrt{\kappa RT} \cong 20.05\sqrt{T} = 20.05\sqrt{220} \cong 297 \text{ m/s} \quad (14.45)$$

A Mach szám pedig (14.6) szerint, egyszerűen számítható:

$$Ma = \frac{c}{a} = \frac{447}{297} \cong 1.5 \quad (14.46)$$

Az eredményül kapott Mach szám, a helyi hangsebesség másfélszeresével történő repülést jelez. Ennél valamivel nagyobb sebességgel repült pl. az angol-francia gyártású, Concorde típusú, szuperszónikus utasszállító repülőgép.

A 220 Kelvin fokos környezeti hőmérséklet egyébként – a Nemzetközi Normál Atmoszféra értékei szerint – mintegy 10 km-es repülési magasságnak felel meg. Az ilyen, vagy hasonlóan nagy repülési sebességeket ezen, vagy ennél nagyobb magasságokon érik el a repülőgépek.

A nagy, vagy nagyon nagy sebességek esetén az aerodinamikai felmelegedés miatt eljuthatunk a hőhatárnak nevezett határ-sebességig. Ennél a sebességnél a szerkezet felmelegedése miatt szilárdsági és egyéb problémák jelentkeznek – így, általában ezt a sebességet átlépni csak különleges módon lehet. A környezeti levegő hőmérsékletének alacsony volta segít a hőhatár kitolásában.

## 15. Súrlódásos áramlások

A súrlódás fizikai értelmezését és a feszültség tenzort az 1. pontban vezettük be. Hasonlóképpen már a 7. pontban ismertettük a Navier-Stokes egyenletet – ez a (7.14) kifejezés. A következőkben csak az ún. Newton-i folyadékokkal foglalkozunk, mivel a mérnöki gyakorlatban előforduló folyadékok általában ilyenek. Nem Newton-i folyadéokra példa az aszfalt – naponta láthatók az aszfalton a járműterhelés hatására kialakuló és tartósan megmaradó hullámok. Természetesen nagyon sok, másféle, nem Newton-i folyadék is létezik; ezekkel részletesebben a szakirodalom foglalkozik.

A Newton-i folyadékokra jellemző, hogy a bennük létrejövő csúsztató feszültség a dinamikai viszkozitással (ez anyagi jellemző, amelyet megfelelő műszerrel mérni lehet) és a deformáció sebességével egyenesen arányos. A legegyszerűbb esetben ez az alábbi alakban írható:

$$\tau = \mu \frac{\partial c_y}{\partial x}; \quad \text{ahol } \mu \text{ a dinamikai viszkozitás} \quad \left( [\mu] = \frac{Ns}{m^2} \right) \quad (15.1)$$

A dinamikai és a kinematikai viszkozitás (ez utóbbi a dinamikai viszkozitás a sűrűséggel osztva) fizikai értelmezése az 1-es, bevezető fejezetben olvasható.

A csúsztató feszültség legegyszerűbb kifejezésétől gyorsan eljuthatunk a csúsztató feszültséget összefoglaló feszültség tenzorhoz. Első lépésben lássuk be, hogy pl. a  $\tau_{xy}$  csúsztató feszültség a megfelelő deformációs sebességgel ( $\dot{\gamma}_{xy}$ ) arányos:

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial c_y}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial y} \right) = \mu \dot{\gamma}_{xy} \quad (15.2)$$

Ez a kifejezés részben (ha  $\partial c_x / \partial y$  nulla), akkor visszavezet (15.1)-hez. Másrészt a 4. fejezet 4.3.-as ábrájához kapcsolódó magyarázat szerint (15.2)-ben, a zárójelben éppen a megfelelő disztorziós sebesség összetevő van. Ez, a kontinuum - tulajdonság pedig megfelel a tényleges részecske cserének, illetve kohézióknak.

A feszültségek indexelésénél a korábban, az (1.2) kifejezésnél leírt definíció érvényes. (A feszültségek indexelése a következő elv szerint történik: az első index megmutatja, hogy a feszültség összetevő mely koordináta tengely irányába mutat; a második index megmutatja, hogy a feszültség összetevő mely koordináta tengelyre merőleges síkban fekszik.)

A (15.2) kifejezést már könnyen általánosíthatjuk. A Newton-i folyadékokban érvényes, a súrlódást kifejező tenzor rész:

$$\mathbf{\Pi}_s = 2\mu \mathbf{D}_s - \frac{2}{3}(\mu \operatorname{div}) \mathbf{E} \quad (15.3)$$

A (15.3) jobb oldalának első tagja (4.8) rövid alakjával írható fel:

$$2\mu \mathbf{D}_s = 2\mu \begin{bmatrix} \delta_x & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \delta_y & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \delta_z \end{bmatrix};$$

A főátlón kívüli elemek megfelelnek a (15.2) szerinti felírásnak, vagyis ezekből a tagokból a megfelelő csúsztató feszültség összetevő számítható. Ugyanakkor a főátló elemeinek a viszkozitással való szorzata azt jelentené, hogy az összenyomódás (vagy a kitágulás) csúsztató feszültséget okoz – ez pedig nem felel meg a fizikai valóságnak. Másképpen fogalmazva azt állítjuk, hogy az általunk vizsgált áramlástani jelenségek körében a kompresszibilitási viszkozitás nulla. Ennek megfelelően alkalmazzuk a (15.3) jobb oldalán lévő második tagot.

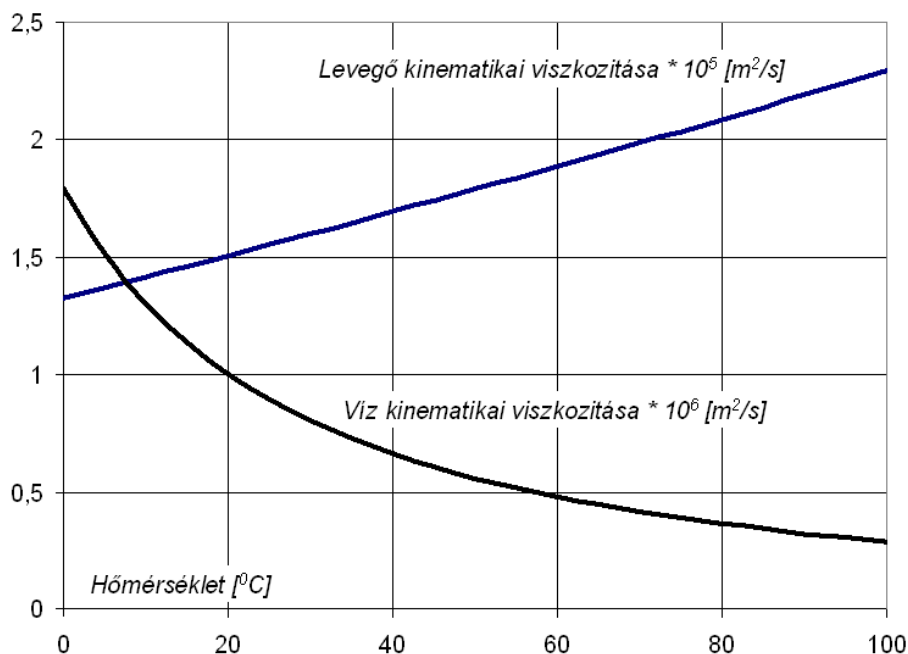
A derivált tenzor szimmetrikus részének főátlójában álló elemek összege éppen a sebesség divergenciája. Ezért a (15.3) jobb oldalán lévő második tag kivonásával megszüntetjük a kompresszibilitási viszkozitást mivel az első tag főátlóbeli elemeinek összege és a második tag főátlóbeli elemeinek összege azonos – az előjelük viszont különbözik, így együttes hatásuk nulla.

Összenyomhatatlan közeg esetében – amikor a folytonosság törvénye:  $\text{div} \mathbf{v} = 0$  – a Newton-i sűrűdést kifejező tenzor rész egyszerűen a  $\mathbf{\Pi}_s = 2\mu \mathbf{D}_s$  lesz.

A műszaki gyakorlatban a dinamikai viszkozitás helyett inkább a kinematikai viszkozitást használjuk:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}; \quad \text{dimenziója: } [m^2/s] \quad (15.4)$$

A kinematikai viszkozitás a nevét onnan kapta, hogy dimenziójában csak kinematikai mértékegységek ( $[m^2/s]$ ) szerepelnek. A kinematikai viszkozitás, atmoszférikus nyomáson, a hőmérséklet függvényében látható a 15.1 ábrán:



15.1. ábra – Kinematikai viszkozitás, atmoszférikus nyomáson, a hőmérséklet függvényében

A 15.1. ábra értelmezésének megkönnyítésére tekintsük egy konkrét kinematikai viszkozitás értéket: a levegő kinematikai viszkozitása 20 °C-on, 1 bar nyomáson kb.  $1.51 \cdot 10^{-5} [m^2/s]$ , dinamikai viszkozitása pedig  $1.84 \cdot 10^{-5} [N \cdot s / m^2]$ .

Tekintsük másik példaként a következőt: a víz kinematikai viszkozitása  $20\text{ }C^0$ -on  $1.01 \cdot 10^{-6} [m^2/s]$ , dinamikai viszkozitása pedig  $1 \cdot 10^{-3} [N\ s / m^2]$ .

A levegő kinematikai viszkozitása több mint tízszerese a vízének. De ez csak annyit jelent, hogy a dinamikai viszkozitás – ami a csúsztató feszültségre közvetlenül jellemző – a sűrűségek különbsége miatt a víznél több, mint 50-szer lesz nagyobb, mint a levegőnél. Vagyis általában a folyadékokban ébredő csúsztató feszültség – ha az egyéb tényezők azonosak – valóban sokkal nagyobb, mint a gázokban keletkező csúsztató feszültség.

Az első részben leírtak szerint a folyékony folyadék esetében, a hőmérséklet növekedésével, amikor a részecskék a hőmozgás intenzitásának növekedése miatt egymástól távolabb kerülnek, a sűrűdés feszültség csökken. Ez azért van így, mert a viszkozitás ebben az esetben döntően a kohéziós erőn alapszik és ez, a hőmérséklet és ezzel a részecskék közötti átlagos távolság növekedésével csökken. Ugyanakkor, a gázok réteges (lamináris) áramlásának esetében, a hőmérséklet növekedésével nő a csúsztató feszültség, mert a hőmozgás intenzitásának növekedésével nő a megfelelő mozgásmennyiség transzport. Az ebben a csúsztató feszültségben szereplő dinamikai viszkozitást anyagjellemzőnek tekintjük, ezt a csúsztató feszültséget a deformáció-sebességekkel és a dinamikai viszkozitással határozzuk meg (15.3 képlet).

A 15.1 ábrán a víz és a levegő kinematikai viszkozitása látható, méretarányos formában. Általában is: a folyékony folyadékok, illetve a gáznemű közegek viszkozitásának görbéje – a hőmérséklet függvényében, állandó nyomáson – hasonlóképpen alakul. Szám adatok különböző közegekre [2]-ben, illetve [13]-ban találhatóak. A viszkozitás értékét zárt alakban leíró formulák [13]-ban találhatóak.

A feszültség tenzor – az ideális közegnél leírtakat is figyelembe véve – a következő alakot ölti:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_{id} + \mathbf{\Pi}_s = -p\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}_s - \frac{2}{3}(\mu\text{div})\mathbf{E}; \quad (15.5)$$

Ez a feszültség tenzor nagyon széles körben érvényes – alkalmazható például a direkt numerikus szimulációnak nevezett (DNS) igen modern numerikus módszer esetében is. Hasonlóképpen alkalmazható az ún. örvénytranszport egyenlet (numerikus) megoldásában is. Ezek az eljárások régebben, a rendkívül nagy számításigény miatt nem voltak hozzáférhetőek – és ma is inkább elméleti kérdések numerikus vizsgálata lehetséges ezen a módon, a gyakorlati feladatok megoldása pillanatnyilag még a turbulencia fogalmának bevezetésével lehetséges.

## 15.1. A turbulencia, illetve turbulens áramlások

Ebben a jegyzetben a turbulens áramlásnak az olyan, áramlást nevezzük, amelyben a rendezetlen hőmozgás mellett, további, a hőmozgáshoz hasonló (tehát nulla várható értékű – 15.7 kifejezés harmadik sora) rendezetlen mozgás is létezik, azonban ez a, turbulenciának nevezett, rendezetlen mozgás a hőmozgáshoz képest legalább egy (esetleg több) nagyságrenddel intenzívebb. A rend kedvéért leszögezzük, hogy itt csak homogén, izotróp turbulenciával foglalkozunk.

A turbulens áramlást célszerűen a turbulens sebességingadozások átlagolásával vizsgálhatjuk. Szigorúan véve az időbeli átlagolás csak időben nem változó áramlások vizsgálatát engedné meg, de – szerencsére – részecske szinten elegendően hosszúnak számító átlagolási idő az általunk vizsgálandó problémák esetében, makroszkopikus szinten igen rövid, vagyis a gyakorlatban nincs szükség korlátozásra.

Az áramlási sebességet – a fentiek értelmében – felbonthatjuk egy átlagsebességre ( $\tilde{\mathbf{c}}$ ) és egy turbulens sebesség ingadozásra ( $\mathbf{c}'$ ):

$$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{c}' = \begin{bmatrix} \tilde{c}_x \\ \tilde{c}_y \\ \tilde{c}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c'_x \\ c'_y \\ c'_z \end{bmatrix}; \quad (15.6)$$

A bevezetőben kikötött nulla várható érték alapján felírható:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{c} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{c}') dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\mathbf{c}} dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{c}' dt = \tilde{\mathbf{c}}; \\ \text{mert } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{c}' dt &= \mathbf{0}; \end{aligned} \quad (15.7)$$

A (15.7) vektor-egyenlet, ez, nyilvánvalóan tagonként is igaz kell legyen, azaz pl. az „ $x$ ” komponensre:

$$c_x = \tilde{c}_x + c'_x; \text{ illetve: } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T c'_x dt = 0;$$

Illetve általában:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_x \\ \tilde{c}_y \\ \tilde{c}_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} c'_x \\ c'_y \\ c'_z \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15.8)$$

A turbulens mozgás a rendezett hőmozgáshoz képest (sokkal) intenzívebb részecske cserével jár. Emiatt a turbulens áramlásokban a transzport jelenségek (sokkal) intenzívebbek, mint a réteges (lamináris) áramlásokban. A csúsztató feszültségek a mozgásmennyiség transzport következtében állnak elő – ezek a turbulens áramlásokban tehát (sokkal) nagyobbak lesznek, mint a réteges áramlásokban. Ez alól kivételt csak a nagyon lassú (kis *Reynolds*-számú) áramlások jelentenek, amikor az egyébként magától rétegesként alakuló áramlás mesterségesen lesz turbulenssé. Példaként tekinthetjük a rovarok szárnyát: ennek belépő része, az alakjánál fogva turbulenssé teszi a körülötte áramló levegőt. Hasonló példa a zárttéri modellek esete: ekkor ún. turbulencia-szálat ragasztanak a szárny belépő élére. Megemlítjük még, hogy az ilyen áramlásokban az ívelt lap előnyösebb, mint a (vastag) szárnyprofil – és valóban, akár a rovarok szárnyát, akár a zárttéri modellt tekintjük, ezek szárnya tényleg ívelt lap.

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a turbulenciának esetenként jelentős szerepe van a később tárgyalandó, „leválás”-nak nevezett jelenség esetében. Általában, a turbulencia – a nagyobb energia transzport miatt – késlelteti a leválást. A turbulencia ilyen módon hasznos is lehet – erre példaként a későbbiekben a golflabda sokfelé tárgyalt kialakítását mutatjuk majd be.

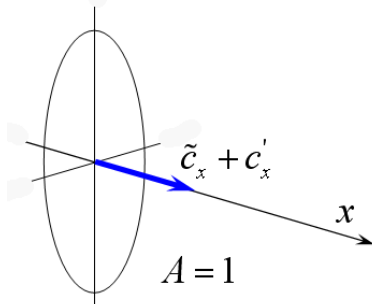
Az intenzív (intenzívebb) energia transzport egyébként például a hőcserélőkben – az átadott hő mennyiségének növelése révén – lehet hasznos. Más esetekben, persze ugyanez a jelenség nemkívánatos is lehet!

A turbulencia hasonló a rendezetlen hőmozgáshoz, mivel a turbulencia is nulla várható értékű, rendezetlen mozgásként fogható fel. Emiatt a turbulens áramlásokban (turbulens) nyomástöbblet jelenik meg. Ez a nyomástöbblet hozzáadódik a rendezetlen hőmozgásból származó statikus nyomáshoz.

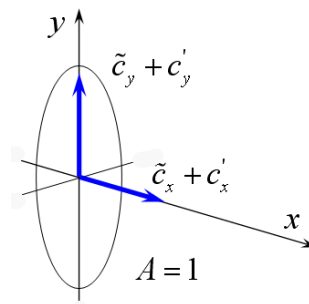
A turbulencia másrészt (turbulens) csúsztató feszültségek megjelenését is eredményezi, mivel a turbulens mozgás következtében is létrejön a különböző sebességű áramlás részek között mozgásmennyiség csere. Ráadásul, a turbulens sebességek intenzitása miatt ez a, turbulens csúsztató feszültség a folyékony folyadékokban általában jelentősen túllépi a kohézió hatását. Így turbulens áramlásban – akár gáz, akár folyékony folyadék esetében – a csúsztató feszültség egyformán, a mozgásmennyiség cseréjével magyarázható.

A gyakorlatban igen sokféle turbulenciát találunk. Ennek megfelelően a mozgásmennyiség csere is igen sokféle lesz – illetve a turbulens csúsztató feszültségek nyilvánvalóan függeni fognak a turbulens mozgás jellegétől.

A turbulens feszültségeket e jegyzetben igen egyszerűen számítjuk.



15.2. ábra – Turbulens nyomástöbblet



15.3. ábra – Turbulens csúsztató feszültség

A 15.2. ábrán egy,  $1\text{ m}^2$ -es ellenőrző felület látható. Írjuk fel erre az impulzus tétel „x” irányban vett, időátlagolt egyenletét (a nyomásingadozásoktól eleve eltekintünk):

$$\overline{(\tilde{c}_x + c'_x)(\tilde{c}_x + c'_x)}\rho = -p;$$

(A felület egységnyi, ezt ezért nem tüntettük fel).

Vegyük tekintetbe, hogy a (15.8) szerinti időátlagok ugyan nullák, de a turbulens sebesség-ingadozások szorzatának időátlaga (ez ebben a kifejezésben mindig nem negatív) már általában pozitív értéket ad. A fenti kifejezést átrendezve kapjuk:

$$\rho \tilde{c}_x^2 = -p - \rho \widetilde{c'_x c'_x} \quad (15.9)$$

Vagyis a statikus nyomás mellett megjelent egy tag: ezt nevezzük turbulens nyomástöbbletnek. Ezt a gondolatmenetet megismételhetnénk az „y” és a „z” tengely irányába is: ezekben az esetekben a sebesség indexe megfelelően változik. Mivel kikötöttük, hogy csak homogén, izotrop turbulenciával foglalkozunk, azért a turbulens nyomástöbblet – a statikus nyomáshoz hasonlóan, szintén irányfüggetlen lesz.

Tekintsük most a csúsztató feszültségek alakulását. Írjuk fel a 15.3 ábra alapján az impulzus tételt:

$$\overline{(\tilde{c}_x + c'_x)(\tilde{c}_y + c'_y)}\rho = -\tau_{xy} \Rightarrow \rho \tilde{c}_x \tilde{c}_y = -\tau_{xy} - \rho \widetilde{c'_x c'_y};$$

A turbulens nyomástöbblet esetében egy-egy a sebesség-összetevőnek az önmagával vett szorzatának az időátlagát kellett tekinteni. Ez nyilvánvalóan nem negatív: azonosan nulla ingadozás esetén nulla és bármekkora intenzitás esetén pozitív értéket ad. A fenti, két, különböző sebesség-ingadozás-összetevő szorzataként kiszámított csúsztató feszültség összetevő értéke nyilvánvalóan akár pozitív, akár negatív is lehet. Ez a sebesség-ingadozások alakulásától függ – de ennek így is kell lennie, hiszen ezt a csúsztató feszültséget pontosan a sebesség-ingadozások hozzák létre.

Ezt a műveletsort is megismételhetjük a további koordináta párokra. Végeredményben a turbulens feszültség tenzort kapjuk:

$$\mathbf{\Pi}_t = -\rho \begin{bmatrix} \overline{c'_x c'_x} & \overline{c'_x c'_y} & \overline{c'_x c'_z} \\ \overline{c'_y c'_x} & \overline{c'_y c'_y} & \overline{c'_y c'_z} \\ \overline{c'_z c'_x} & \overline{c'_z c'_y} & \overline{c'_z c'_z} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{\Pi}_t = 2\mu_t \mathbf{D}_s \quad (15.10)$$

A turbulens csúsztató feszültség bal oldali kifejezése az eddig bemutatott fizikai alapokon írható fel. A turbulens feszültség tenzor ilyen felírása igen szemléletes és a szimmetria is rögtön láthatóan teljesül. Amennyiben ezt a kérdést a statisztikus mechanika szempontjából közelítenénk, akkor a sebesség-ingadozások szorzatainak az átlagait a tényleges részecskék viselkedését jellemző statisztikai tulajdonságok alapján számíthatnánk

Ebben a jegyzetben elfogadjuk Boussinesq hipotézisét, ami szerint a csúsztató feszültség tenzor e részét az összenyomhatatlan közegeknél megismert tenzorhoz hasonló formában (15.3 megfelelő része) írjuk fel. Ennek megfelelően, a jobb oldalon a (15.3)-hoz formailag hasonló módon írtuk fel ugyanezt a tenzort (15.10 jobb oldali rész), de bevezetjük a turbulens dinamikai viszkozitást. A turbulens dinamikai viszkozitás számítására rendkívül sokféle eljárás ismeretes – ezen eljárások többnyire a vizsgált problémától (az ott végbemenő áramlástani folyamatoktól) függenek.

E tantárgy keretei között mindössze a legrégebbi és legegyszerűbb, Prandtl féle turbulencia modellt vezetjük be. Ez a turbulencia modell egy, szintén Prandtl nevéhez fűződő hipotézisen alapul:

$$c'_x := -\ell \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \quad \text{és} \quad c'_y := -c'_x = \ell \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \quad \text{ahol: } \ell = \kappa y \quad (15.11)$$

( $\kappa = 0.36$ ,  $\ell$  a keveredési úthossz)

Figyelem: a „ $\kappa$ ” itt a keveredési úthossz együtthatója, a jegyzet más helyein pedig az adiabatikus kitevőt jelenti. E szimbólum használatát az indokolja, hogy a vonatkozó szakirodalomban lényegében mindenütt ezt a jelölést használják. Véleményünk szerint, kellő figyelemmel – különös tekintettel jelen figyelemfelhívásra – az esetleges félreértések elkerülhetők.

A (15.11) egyenlet hipotézis, amit az alkalmazásával elért (jó) eredmények igazolnak! Számítsuk ki a turbulens csúsztató feszültséget:

$$\overline{c'_x c'_y} = -\ell^2 \left| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \right| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \Rightarrow \tau_{xy} = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \right| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y}; \quad (15.12)$$

A csúsztató feszültségből könnyen kiválasztható a turbulens dinamikai viszkozitás:

$$\mu_t = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \right|; \quad \text{és} \quad \nu_t = \ell^2 \left| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \right| \quad (15.13)$$

A turbulens dinamikai és kinematikai viszkozitás – ahogy annak lennie is kell – pozitív mennyiség. Eközben, természetesen, a nyomástól különbözően (ami mindig pozitív) a csúsztató feszültség tetszőleges előjelű lehet. Ezt az biztosítja, hogy a (15.12)-ben a sebesség deriváltjának az abszolút értéke szerepel. A másik, abszolút értéken kívüli derivált előjele viszont (matematikailag és fizikailag) meghatározza a csúsztató feszültség megfelelő előjelét.

Fontos leszögezni azt is, hogy a turbulens kinematikai és dinamikai viszkozitás nem anyagjellemző, hanem az éppen kialakuló sebességeloszlás függvénye. Ez utal a számítási nehézségekre is: a turbulens áramlás sebességeloszlását az áramlás sebességterének ismeretében számíthatjuk, miközben a sebességtér számításához a turbulens viszkozitás ismerete szükséges.

Gyakran szükséges az áramlások turbulensségének számmal történő jellemzése. Erre több lehetőség is ismert, itt csak a legegyszerűbb, azonban igen nagy gyakorlati jelentőségű a turbulencia faktort mutatjuk be:

$$tf = \frac{3.85 \cdot 10^5}{\text{Re}_{\text{krit.gömb}}} \quad (15.14)$$

A nevezőben a gömb kritikus Reynolds száma szerepel. Erről a későbbiekben lesz szó. A fenti hányados értéke általában egynél nagyobb szám – minél kevésbé turbulens, minél simább egy áramlás, annál inkább közeledik a „ $tf$ ” érték az 1-hez. A teljesen turbulenciamentes áramlás esetén lesz „ $tf$ ” értéke egy.

## 15.2. A Navier-Stokes egyenlet

A mozgásmennyiség megmaradását kifejező differenciálegyenletet már korábban bevezettük:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{1}{\rho} \text{div}\mathbf{\Pi} + \mathbf{g}; \quad \text{ahol:} \quad (7.14)$$

$$\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}_s - (2/3)(\mu \text{div}\mathbf{c})\mathbf{E} + 2\mu_t\mathbf{D}_s = \mathbf{\Pi}_{id} + \mathbf{\Pi}_s + \mathbf{\Pi}_t;$$

A (7.14) egyenlet megismétlése kapcsán itt nyílik módunk az áramlástanban használt feszültség tenzor részletes felírására – ez a (7.14) egyenlet alatti, kiegészítő sor. Ebben a sorban, a kifejezés középső, illetve jobb oldali első tagja az ideális közegben értelmezett, csak a nyomást tartalmazó feszültség tenzor. A középső rész második és harmadik tagja (ezt a jobb oldal második tagja összefoglalóan fejezi ki) az anyagszerkezeti viszkozitáson alapuló csúsztató feszültségeket összefoglaló tenzor. Végül a középső rész negyedik tagja, illetve a jobb oldal harmadik tagja a turbulens csúsztató feszültségeket összefoglaló tenzor.

Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a (7.14) egyenlet tartalma és elnevezése nagymértékben függ attól, hogy a teljes feszültség tenzorba mely tagokat vesszük be (vagy hagyjuk el):

Ha:  $\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{E} = \mathbf{\Pi}_{id}$ ; és  $\mathbf{c} \equiv \mathbf{0}$ ; - akkor a hidrosztatika alap differenciál-egyenletét kapjuk, ez egyébként a (8.1) sz. egyenlet.

Ha:  $\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{E} = \mathbf{\Pi}_{id}$ ; - ezzel a (7.15)-ös kifejezésnél már leírt, Euler egyenlethez jutunk, amely ideális (összenyomható) közegek áramlásának leírására alkalmas.



Ha:  $\Pi = -p\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}_s - (2/3)(\mu \operatorname{div}\mathbf{c})\mathbf{E} = \Pi_{id} + \Pi_s$ ; - ezzel a Navier-Stokes egyenlethez jutunk, mely valóságos közeg áramlásának leírására alkalmas – legfeljebb a kezelhetőség lehet probléma.

Ha:  $\Pi = -p\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}_s - (2/3)(\mu \operatorname{div}\mathbf{c})\mathbf{E} + 2\mu_t\mathbf{D}_s = \Pi_{id} + \Pi_s + \Pi_t$ ; - ezzel a Reynolds átlagolt Navier-Stokes egyenlethez jutunk, amely a valóságos közegek turbulens áramlását, az átlagolt turbulens feszültségek bevezetésével írja le.

A fenti felsorolásból a harmadik tag, a Navier-Stokes egyenlet a legáltalánosabb kifejezés – minden áramlástan feladatban alkalmazható. A (15.5) egyenlettel meghatározott feszültség tenzor értelmezésénél ezt az általánosságot már leszögeztük, és utaltunk arra is, hogy ezt az egyenletet a gyakorlatban meglehetősen nehéz megoldani.

A Reynolds átlagolt Navier-Stokes egyenlet ugyan tartalmaz néhány megszorítást a Navier-Stokes egyenlethez képest, de éppen az átlagolt mennyiségek alkalmazása miatt, jelen pillanatban a bonyolultabb és kiterjedtebb áramlások (numerikus) számítására (a tényleges, gyakorlati feladatok többnyire ilyenek) ezt az egyenletet alkalmazzák. Ezért tűnik úgy, hogy a Reynolds átlagolt Navier-Stokes egyenlet az általánosabb – holott, mindössze ezt vagyunk képesek a gyakorlatban is alkalmazni.

A Reynolds átlagolt Navier-Stokes egyenlet alkalmazása megköveteli valamely turbulencia modell alkalmazását is – a jelen gyakorlatban sokszor az un.  $k - \varepsilon$  (a turbulens kinetikai energiára és a turbulencia miatti energia disszipációra épülő) modellt alkalmazzák – de a numerikus szoftverekben számos, más turbulencia modell is rendelkezésre áll. Ezek a turbulencia modellek egyébként többnyire parciális differenciál-egyenletek. Ezekkel a turbulencia modellekkel itt nem foglalkozunk.

Vizsgáljuk meg a Navier-Stokes egyenlet összenyomható közegre vonatkozó alakját. Ekkor, a folytonosság miatt:  $\rho = \text{áll} \Rightarrow \operatorname{div}\mathbf{c} = 0 \Rightarrow \Pi = -p\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}_s$ . Számítsuk ki ennek a feszültség tenzornak a divergenciáját (2.4 szerint):

$$\operatorname{div}\Pi = \Pi\nabla = -\operatorname{grad} p + (2\mu\mathbf{D}_s)\nabla; \quad (15.15)$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial c_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial c_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial c_z}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial c_z}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial z}\right) & 2\frac{\partial c_z}{\partial z} \end{bmatrix} \nabla;$$

Írjuk ki a sűrűdési tenzor divergenciájának első sorát részletesen:

$$\begin{aligned} (2\mu\mathbf{D}_s)\nabla|_x &= \mu \left[ 2\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x} \right) \right] = \\ &= \mu \left[ \frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} \right) \right] = \\ &= \mu \Delta c_x; \end{aligned} \quad (15.16)$$

A középső sor gömbölyű zárójelben lévő tagja éppen a sebesség divergenciája, ami az összenyomhatatlanság miatt nulla. Ezzel a fenti eredményre jutunk, amit egyszerű számolással ellenőrizni lehet (és ajánlatos is!). A második és harmadik sor számításával hasonló eredményt kapunk, ezeket összefoglalva kapjuk az alábbi, igen gyakran alkalmazott kifejezést:

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}\nabla = -\begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \Delta c_x \\ \Delta c_y \\ \Delta c_z \end{bmatrix} = -\mathbf{grad} p + \mu \Delta \mathbf{c} \quad (15.17)$$

Ezzel a Navier-Stokes egyenletnek az áramlástanban igen gyakran használt alakjához jutunk:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{c} + \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{c} + \mathbf{g} \quad (15.18)$$

Illetve, a baloldal részletesebb kiírásával:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \operatorname{rot} \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{c} + \mathbf{g} \quad (15.19)$$

A 7. pontban, a megmaradási elveknél bevezetett (7.14) egyenlettel kapcsolatban (is) leszögeztük, hogy az ilyen típusú egyenleteknél, az egyenlet pontos ismeretén túl még három ismeretkört kell elsajátítani.

Számítsuk elsőnek az egyenlet ismeretét. A második a megmaradási elv, hogy jelen esetben a mozgásmennyiség megmaradása az elv, és a (15.19) azt mutatja meg, hogy a mozgásmennyiség változásának az oka (forrása) a külső erő impulzusa. Illetve a mozgásmennyiség pontosan annyit változik, amennyit az előbb említett impulzus előidéz.

A harmadik kifejtendő rész az egyes tagok fizikai jelentése. (15.19) *baloldala* a teljes, totális, szubsztanciális vagy materiális gyorsulás. Ezen belül az első tag a lokális gyorsulás. A második tag a konvektív gyorsulás azon része, amely a sebesség nagyságának megváltozásából származik. A harmadik tag pedig a sebesség irányának megváltozásából származó gyorsulást jelenti.

A (15.19) *jobb oldalán* az egységnyi tömegre ható erőket találjuk. A jobb oldal első és második tagja együtt az egységnyi tömegre ható felületi erőt szolgáltatja; ezek közül az első a nyomás-változásból származó, a második a sűrűdésből származó, egységnyi tömegre ható erő. A jobb oldal harmadik tagja az eredő térerősség, ami – a definíciója szerint – éppen az egységnyi tömegre ható térfogati erő.

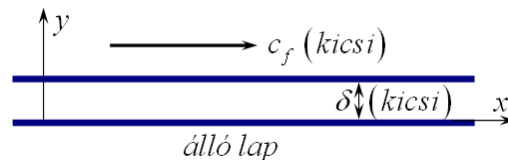
Összefoglalva tehát, a baloldal az időegységre eső mozgásmennyiség változást, a jobb oldal pedig ennek forrását, az egységnyi tömegre ható erőket jelenti – úgy, ahogyan azt a fentiekben már megfogalmaztuk.

A negyedik pedig az érvényességi feltételeket jelenti. A (15.15) kifejezés bevezetése előtt leszögeztük azt a tényt – hogy, ti. a közeg összenyomhatatlan – amit a levezetés során fel is használtunk; ennek megfelelően (15.19) csak az állandó sűrűség esetére érvényes. A következő lépésben számítottuk (15.16)-ot. E számításban a viszkozitást kiemeltük a differenciálás elé: ezzel feltételeztük, hogy a viszkozitás a hely (és ezzel a sebesség-eloszlás) függvényében nem változik.

Emiatt ez az egyenlet turbulens áramlásra nem érvényes, mivel a turbulens viszkozitás a mozgásállapot függvénye (is).

## Példa – egyszerűsített Couette áramlás

A Navier-Stokes egyenlet zárt alakú megoldásának megkeresése, általános esetben lényegében lehetetlen. Következik ez részben a Navier-Stokes egyenlet tulajdonságaiból (ez egy, igen összetett, nemlineáris, parciális differenciálegyenlet), illetve az elképzelhető peremfeltételek sokféleségéből. A következőkben egy, egészen egyszerű feladatot vizsgálunk:



15.4. ábra – Couette áramlás síklapok között

Tekintsük a 15.4. ábrán látható, két sík lap között kialakuló áramlást. Legyen az áramlás stacionárius, tekintsünk el a térerősség hatásától és érvényesek a következő egyszerűsítő feltételek:

$$\frac{\partial p}{\partial x} := 0; \frac{\partial c_x}{\partial x} := 0; c_y := 0; \rho = \text{állandó};$$

Vagyis a nyomás a hossz mentén ne változzon, az „x” irányú sebesség összetevő csak „y” szerint változzon, legyen az „y” irányú sebesség összetevő nulla és legyen a sűrűség állandó.

Ezzel egyméretű, stacionárius áramlás modelljéhez jutottunk. A kis sebesség és kis magasság miatt pedig ez az áramlás (az elég kis Reynolds szám alapján) réteges (lamináris) lesz.

A (15.19)-cel adott, összenyomhatatlan közegre vonatkozó Navier-Stokes egyenlet bal oldalán a teljes gyorsulás áll. Számítsuk ki ezt az (5.5) kifejezés szerint. Mivel az áramlás stacionárius, elegendő a konvektív gyorsulást vizsgálni:

$$\mathbf{Dc} = \begin{bmatrix} \partial c_x / \partial x & \partial c_x / \partial y & \partial c_x / \partial z \\ \partial c_y / \partial x & \partial c_y / \partial y & \partial c_y / \partial z \\ \partial c_z / \partial x & \partial c_z / \partial y & \partial c_z / \partial z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Vagyis (15.19) bal oldala nulla. A továbbiakban a Navier-Stokes egyenlet három rész egyenlete közül csak az „x” irányban felírható rész egyenletet tekintjük, mert a másik két irányban azonosan nulla eredményre jutunk. (Ez következik abból is, hogy ez az áramlás egyméretű áramlásként kezelhető). A nyomás-gradiens a feltétel szerint:

$$-\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

Ezután az egységnyi tömegre ható, sűrűdásból származó erőt számítjuk ki:

$$\nu \Delta \mathbf{c} \Rightarrow \nu \left( \frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} \right) = \nu \left( 0 + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} \right) = \nu \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2};$$

Mivel az egységnyi tömegre ható tömeg-erővel (térerősség –  $\mathbf{g}$ ) nem kell számolnunk, a feladat matematikai modellje és a megoldás általános alakja a következő lesz:

$$0 = \nu \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2}; \Rightarrow \nu \frac{d^2 c_x}{dy^2} = 0 \Rightarrow c_x = a + by;$$

A feladat másodrendű parciális differenciálegyenlet, azonban, mivel csak egy független változó maradt, ezért elegendő egy másodrendű, közönséges differenciálegyenletet megoldani. Ennek zárt alakú megoldása, egyenlőre két, határozatlan állandóval látható a jobb oldalon.

Az állandók a peremfeltételek segítségével határozhatók meg:

$$y = 0 \Rightarrow c_x = 0 \Rightarrow b = 0; \quad \text{és} \quad y = \delta \Rightarrow c_x = c_0 \Rightarrow a = \frac{c_0}{\delta}$$

A keresett megoldás tehát:

$$c_x(y) = \frac{c_0}{\delta} y;$$

A feladat egyszerűségének megfelelően a megoldás is igen egyszerű: az egyetlen, nem nulla sebesség összetevő a két lap között lineárisan változik. (A peremfeltételeknek való megfelelés egyszerű rápillantással ellenőrizhető.)

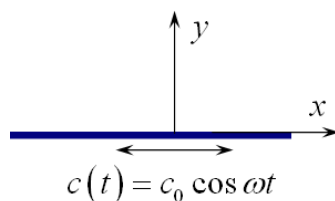
Határozzuk meg még a csúsztató feszültség alakulását is:

$$\tau_x(y) = \mu \frac{\partial c_x}{\partial y} = \mu \frac{dc_x}{dy} = \mu \frac{c_0}{\delta} = \text{állandó};$$

Ez az áramlás igen egyszerű bevezető lépés, ebbe az irányba lépve tovább a csapágyak hidrodinamikai kenélméletéhez juthatunk el.

## Példa – Stokes féle probléma megoldása

Vizsgáljuk azt az áramlást, ami a 15.5. ábra szerint, egy síklap felett, a  $0 \leq y < \infty$  féltérben alakul ki. Tegyük fel, hogy az ábra síkjára merőlegesen semmi sem változik.



15.5. ábra – Stokes féle (2) probléma

Hanyagoljuk el a térerősséget ( $\mathbf{g} := \mathbf{0}$ ) és tekintsünk el a nyomás változásától is ( $\mathbf{grad} p := \mathbf{0} \Rightarrow p = p_0$ ). A Navier-Stokes egyenlet ebben az esetben az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\frac{\partial c_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2};$$

Peremfeltételként a síklaphoz történő tapadást fogalmazzhatjuk meg, ami szerint az  $y=0$  koordinátánál (minden „ $x$ ” értékre) a közeg sebessége a lap sebességével egyenlő:

$$c_x(0,t) = c_0 \cos \omega t; \quad (\omega \text{ a lap lengésének körfrekvenciája})$$

Vegyük észre, hogy az alábbi függvény kielégíti a kiinduló másodrendű, parciális differenciálegyenletet:

$$c_x(y,t) = c_0 e^{-ky} \cos(\omega t - ky); \quad \text{hacsak } k = \sqrt{2\nu/\omega};$$

A megoldásfüggvény az  $y \rightarrow \infty$  esetben az azonosan nulla értékhez tart, vagyis azt a fizikai elvárást is kielégíti, ami szerint a laptól távolodva, annak hatása nullához (jelen esetben a nyugalmi állapot) kell tartson.

Helyettesítsük be „ $k$ ” értékét a megoldásfüggvénybe, hogy előálljon a végleges alak:

$$c_x(y,t) = c_0 e^{-\sqrt{2\nu/\omega}y} \cos(\omega t - \sqrt{2\nu/\omega}y);$$

A Stokes-probléma a gyakorlati alkalmazások mellett fontos teszt esete lehet egyes, időben változó áramlások számítására alkalmas numerikus módszereknek.

### 15.3. A hasonlóság elmélet

A Navier-Stokes egyenlet parciális differenciálegyenlet. A matematikában a korrekt kitűzésű probléma definíciójához hozzátartozik a perem és kezdeti feltételek megadása, valamint a számítási tartomány kitűzése. Ezek a gyakorlatban rendkívül sokfélék lehetnek, ezért a (7.14), esetleg (15.19) egyenlet általános megoldása csak kevés esetre ismert. Napjainkban ugyan nyitott a numerikus megoldás lehetősége, azonban számos esetben elegendő, ha korábbi mérések eredményeire támaszkodva végezhetünk számításokat.

A mérési eredmények felhasználhatóságát állapíthatjuk meg a hasonlóság-elmélet segítségével. Tekintsük a (15.19) egyenletet és definiáljuk mérés (külön jelölés nélkül) és a tervezett felhasználás (ennek jellemzőit csillaggal jelöltük) között a következő átszámítási tényezőket:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* M_r; \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}^* M_c; \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}^* M_g; \quad (15.20)$$

$$\rho = \rho^* M_\rho; \quad p = p^* M_p; \quad \nu = \nu^* M_\nu$$

$$\text{az idő átszámítási tényezője ezzel: } M_t = M_r / M_c$$

Ezekkel az átszámítási tényezőkkel felírható a mérési esetre vonatkozó egyenlet:

$$\frac{M_c^2}{M_r} \frac{d\mathbf{c}^*}{dt^*} = - \frac{M_p}{M_\rho M_r} \frac{1}{\rho^*} \mathbf{grad}^* p^* + \frac{M_\nu M_c}{M_r^2} \nu^* \Delta^* \mathbf{c}^* + M_g \mathbf{g}^* \quad (15.21)$$

$$(i) \qquad (ny) \qquad (s) \qquad (te)$$

A (15.21) egyenlet egyes tagjai alá, zárójelben a tag fizikai tartalmára jellemző jelet írtunk: az „ $i$ ” az egységnyi tömegre vonatkozó tehetetlenségi (inercia) erőt, az „ $ny$ ” az egységnyi tömegre

vonatkozó, nyomásváltozásból származó erőt, az „s” az egységnyi tömegre vonatkozó, sűrűdésből származó erőt és végül a „te” a térerősséget jelenti.

Két jelenség pontosan akkor hasonló, ha a mozgásegyenletük csak egyetlen, konstans szorzóban különbözik. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha:

$$\frac{M_c^2}{M_r} = \frac{M_p}{M_\rho M_r} = \frac{M_v M_c}{M_r^2} = M_g \quad (15.22)$$

Számítsuk ki a tehetetlenségi („i”) és a sűrűdési („s”) erőket jellemző hányadost:

$$\frac{(i)}{(s)} = \frac{M_c^2}{M_r} \frac{M_r^2}{M_v M_c} = \frac{M_c M_r}{M_v} \Rightarrow Re = \frac{c r}{\nu} \quad (15.23)$$

Ez az „Re”-vel jelölt, Reynolds szám. Ez egy hasonlósági kritérium, ami a tehetetlenségi és a sűrűdési erők viszonyát fejezi ki. Itt csak megemlítjük, hogy statisztikus mechanikai értelemben a Reynolds szám a makroszkopikus sebesség és hosszúság, illetve a mikroszkopikus sebesség (a részecskék hőmozgásának átlagsebessége) és a hosszúság (közepes szabad úthossz) hányadosával arányos:

$$Re \sim \frac{c r}{c_{rh} r_{ksz}} \quad (15.24)$$

ahol:  $c_{rh}$  - a részecskék rendezetlen hőmozgásának

átlagsebessége;

$r_{ksz}$  - a részecskék közepes szabad úthossza.

Számítsuk ki a tehetetlenségi („i”) és a nyomásváltozásból származó („ny”) erőket jellemző hányadost:

$$\frac{(i)}{(ny)} = \frac{M_c^2}{M_r} \frac{M_p M_r}{M_p} = \frac{M_c^2 M_p}{M_p} \Rightarrow Eu = \frac{c^2 \rho}{p} \quad (15.25)$$

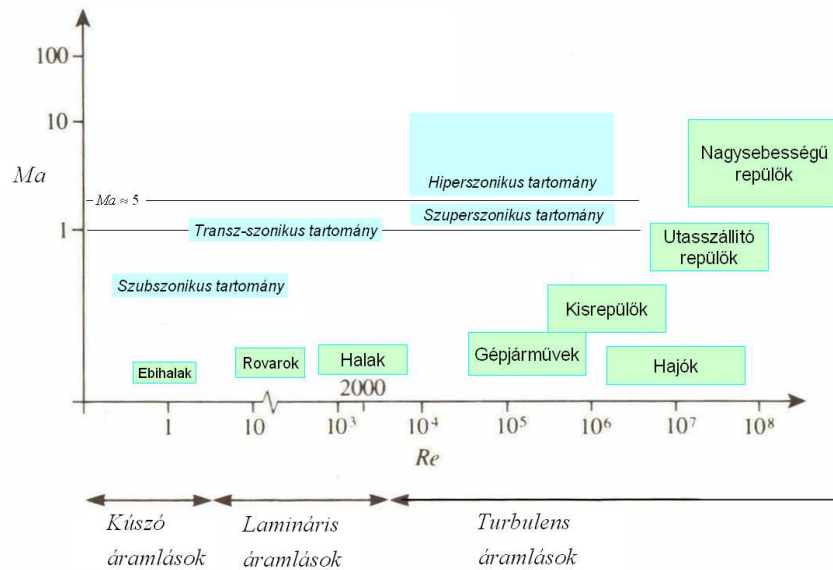
Ez az Euler-szám. Az Euler számot – bár kevésbé közismert, mint a Reynolds szám – igen elterjedten alkalmazzák például a felhajtóerő vagy az ellenállás tényező számításánál. Erről bővebb ismertek a 18. pontban találhatóak.

Határozzuk meg a tehetetlenségi („i”) és a térerősségből származó („t”) erőket jellemző hányadost:

$$\frac{(i)}{(te)} = \frac{M_c^2}{M_r} \frac{1}{M_g} \Rightarrow Fr = \frac{c}{\sqrt{r g}} \quad (15.26)$$

Ez a számot Froude-számnak nevezzük. A Froude szám például szabad felszínű áramlások esetében fontos: ezért ezt a hasonlósági kritériumot gyakran alkalmazzák a hajók áramlástanai vizsgálatában.

A 15.6 ábrán – az érdekesség kedvéért – néhány, jellemző Reynolds számot, illetve Mach számot tüntettünk fel. A „Természet” az ábra bal alsó sarkában látható; az emberkéz alkotta járművek jobb oldalon, illetve magasabban is láthatók – ezekben az esetekben a Reynolds szám, illetve a Mach szám, néhány esetben pedig mindkettő nagyobb, vagy jelentősen nagyobb, mint a természetben előforduló mozgásformákhoz tartozó jellemző számok. Természetesen más példa is létezik, az ábra csak néhány vonatkozást mutat be.



**15.6. ábra – Reynolds és Mach szám tartományok**

A (15.18) vagy a (15.19) egyenlet összenyomhatatlan közegek áramlására érvényes. Ezért az összenyomhatóságra vonatkozó hasonlósági számot külön kell bevezetni – ezt a hasonlósági számot egyébiránt már a 14. pontban bevezettük:

$$Ma = \frac{c}{a} \quad (14.9)$$

Ez a Mach-szám, amit az áramlási sebesség és a hangsebesség viszonzyszámaként definiálunk, a tehetetlenségi és a rugalmas erők viszonyát fejezi ki.

Az összenyomható közegek áramlásának hasonlóságához a fentiekén túl még az adiabatikus kitevő ( $\kappa$ ) azonossága is szükséges.

Az eddig tárgyalt összes esetben szükséges továbbá a geometriai méretek hasonlósága is.

A hasonlóság a hasonlósági kritériumok teljesítésével érhető el. A gyakorlatban az összes kritérium egyidejű teljesítése – a triviális esettől eltekintve – nem igazán lehetséges. Ezért szokás az egyes hasonlósági számoknál azt hangsúlyozni, hogy mely problémakörben fontosak. Ez ad gyakorlati iránymutatást arra, hogy egy, adott esetben hogyan rangsoroljuk a hasonlósági kritériumokat. Elsősorban a fontosnak tartott kritérium betartására kell törekedni (ez nagyon sokszor a Reynolds szám, de ideális közeg nagysebességű áramlásában ilyen a Mach szám is) és ha ezután mód van rá akkor érdemes foglalkozni a többi kritériummal.

## Példa szélcsatorna modellre

Tekintsünk egy repülőgép szárnyprofil. A profil hossza a gyakorlatban 1.5 méter és a jellemző áramlási sebesség 50 m/s – ez egy kisrepülőgép szárnyprofilja lehet. A profil jellemzőit szélcsatornában kívánjuk vizsgálni, ide legfeljebb 0.5 méter húr hosszú profilt helyezhetünk be. Az a kérdés, hogy milyen sebessége kell legyen a szélcsatornában keltett áramlásnak, ha a közeg (levegő) jellemzői a gyakorlatban és a szélcsatornában azonosnak vehetők?

Ebben az esetben a minimum feltétel a geometriai hasonlóság – tehát olyan kismintát kell készíteni, amely az eredeti profilnak arányosan kicsinyített (1/3 arányú) modellje.

A szélcsatornában áramló levegő sebességét a Reynolds szám azonossága alapján határozzuk meg:

$$Re_{\text{repülőgép}} = \frac{cL}{\nu} = \frac{50 \cdot 1.5}{1.51 \cdot 10^{-5}} = 4.97 \cdot 10^6 ;$$

A szélcsatornában áramló levegő sebessége tehát:

$$c_{SZ} = \frac{Re_{\text{repülőgép}} \nu}{L_{\text{MODELL}}} = \frac{4.97 \cdot 10^6 \cdot 1.51 \cdot 10^{-5}}{0.5} = 150 \text{ m/s} ;$$

Ezzel a Reynolds szám azonosságot elértük. Felmerül azonban egy új (jellemző) probléma: a Mach szám a háromszorosára nőtt és ez már – precízebb méréseknél – az összenyomhatóság figyelembe vételét igényli.

Csak megjegyezzük, hogy a gyakorlatban sok olyan szélcsatorna működik, melyben a mérőközeg nyomása eltér a környezeti nyomástól.



## 16. A határréteg elmélet elemei

A határréteg egy olyan, általában jól körülhatárolható áramlási zóna, ahol a csúsztató feszültség hatása jelentős. Itt meg kell jegyezni, hogy a csúsztató feszültség keletkezésének két, szükséges és elégséges feltétele van: egyrészt a közegnek kell legyen viszkozitása (ez mindig van, de esetenként eltekintünk tőle  $\Rightarrow$  ideális közeg), másrészt kell legyen sebesség-különbség. Viszkózus folyadék estében például, hidrosztatikai probléma vizsgálatokor nem keletkezik csúsztató feszültség, mivel nincs sebesség különbség.

A gyakorlatban létrejövő áramlásokban sokszor igen kiterjedten található olyan zónák, amelyekben a sebesség alig változik. Ezekben a zónákban a csúsztató feszültség elhanyagolhatóan kicsi – itt ideális közeggel számolhatunk. Az áramlások fennmaradó része a határréteg, ahol a súrlódás hatását feltétlenül figyelembe kell venni. Az áramlási tartományok ilyenén felosztása Prandtl-tól származik, aki ezt a tudományterületet („Határréteg elmélet”) 1904-ben indította útjára.

Másik oldalról közelítve a határrétegben jelentős sebességváltozást találunk, ilyen pl. egy szilárd test felszínéhez közeli réteg. Innen származik a határréteg elnevezés. Természetesen másfajta határréteg is létezik, sőt a sebességváltozáson túl a hőmérséklet változás alapján termikus határréteg is definiálható. Ez utóbbi vizsgálatában a Peclet szám jut jelentős szerephez. A Reynolds számot (15.23)-mal definiáltuk, helyettesítsük most az ott „ $r$ ”-nek nevezett hosszmeretet „ $L$ ”-lel, akkor a Reynolds illetve a Peclet szám kifejezése a következő lesz:

$$Re = \frac{cL}{\nu};$$

$$Pe = \frac{cL}{a}; \text{ ahol } a = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \text{ a hőmérsékletvezetési tényező};$$

Látható, hogy a két hasonlósági kritérium egymáshoz is eléggé hasonló, a különbség a nevezőben van (a Reynolds számnál a kinematikai viszkozitás, a Peclet számnál a hőmérsékletvezetési tényező áll ott). Megjegyzendő még, hogy az (áramlástan) határréteg vastagsága jelentős mértékben a Reynolds szám, a termikus határréteg vastagsága pedig a Peclet szám függvénye.

A következőkben a leggyakoribbnak tekinthető, a szilárd fal mellett kialakuló határrétegről – más néven fali rétegről – lesz szó. Ez alapvetően **réteges** (lamináris) vagy **gomolygó** (turbulens) lehet.

A „fali réteg” típusú határrétegben a közeg a falnak energiát ad át, amely energiát a fallal párhuzamos áramlásra merőlegesen, főként a részecske-transzport következtében létrejövő energia-áram fedez. A lamináris határrétegben ez az energia transzport – mivel csak a rendezetlen hőmozgáson alapul – kicsi. Ezért a lamináris határréteg – amikor már nem képes a szükséges energia transzportra – turbulenssé válik. Ezt átmenetnek nevezzük és más kritériumok mellett esetenként kritikus Reynolds számmal jellemezhetjük. Mivel a turbulens mozgás nagyságrendekkel is intenzívebb lehet, mint a hőmozgás, azért itt az energia transzport is (sokkal) intenzívebb. Amennyiben az áramlás fenntartásához ez az energia transzport sem elegendő, akkor jön létre a leválás. A leválásban makroszkopikus méretű örvénylések alakulnak ki.

A határréteg elmélet legnagyobb előnye – mind a mai napig – az, hogy a határréteg viselkedését leíró egyenletek a kiindulásként tekintett folytonosság és Navier-Stokes egyenleteknél egyszerűbb (sokkal egyszerűbb) matematikai modellre vezet. E matematikai modell kezelése pedig részint jóval könnyebb, részint a belőle származtatható eredmények pedig a gyakorlat számára legalább megfelelőek (esetenként akár kiválóak is) lesznek.

Jó példa erre az általában kevésbé ismert, hibrid programcsomagok esete (pl. PANAIR stb.), ahol az áramlást a vizsgált test környezetében súrlódás figyelembe vételével (pl. határréteggént), távolabb pedig ideális közeggel modellezik. Hangsúlyozandó, hogy a súrlódásos áramlások – itt határréteg – esetében az egyik, igen fontos peremfeltétel a tapadási feltétel, ami szerint a szélső közeg-réteg a szilárd testtel együtt mozog (speciálisan álló test esetén áll). Az ideális közegnél ilyen, tapadási feltétel nincs, ott csak annyit lehet kikötni, hogy a közeg a szilárd fallal (vagy a határréteg külső felületével) párhuzamosan halad. Ez a két feltétel típus fizikai szempontból teljes mértékben megfelelő, hiszen biztosítja, hogy a közeg sebessége a fal sebességétől (igen gyakran nulla) indulva, a faltól távolodva, folytonosan érje el a zavartalan áramlás sebességét.

A Navier-Stokes egyenlet (15.19)-cel leírt alakját – a jobb oldal második tagját, ahol eredetileg a Laplace operátor volt – vektoranalitikai azonosság alapján (ez pl. egyszerűen számolással ellenőrizhető) másképpen is felírhatjuk:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{c}) + \mathbf{g};$$

A Navier-Stokes egyenlet eme a formájából látható, hogy összenyomhatatlan közeg esetében a súrlódásból származó, egységnyi tömegre ható erőt a  $\nu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{c})$  tag fejezi ki. Az ideális közegben meglehetősen gyakori az örvénymentesség ( $\mathbf{rot} \mathbf{c} \equiv \mathbf{0}$ ), vagy legalább a Kelvin és Helmholtz törvények értelmében az örvények állandósága. Ez részben tehát azt jelenti, hogy az ideális közegben tényleg nincs súrlódás. Másrészt azonban kimondható, hogy az általunk tekintett körben a súrlódás a rotáció változásával jár együtt ( $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{c}) \neq \mathbf{0}$ ). Azaz a súrlódás – most éppen a határréteg – örvényeket generál, a határrétegre és a testek mögött kialakuló „örvényes nyom”-ra éppen az örvényesség, illetve annak változása lesz jellemző. Örvényességet egyébként a határréteg mellett jellemzően a valamely térbe befűjt szabad sugarak keltenek.

A 10.1 ábrán egy, valóságos örvény sebesség-eloszlását vázoltuk. A fent leírtak tükrében belátható, hogy pl. az örvény magban van ugyan rotáció, de az állandó, a külső, ideális tartományban a rotáció lényegében nulla – tehát a valóságos örvénynél a súrlódás éppen az átmeneti rétegben lesz jelentős, ott, ahol az állandó örvényesség nullára csökken (így  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{c}) \neq \mathbf{0}$ ).

## 16.1. A határréteg egyenlet

Ebben a jegyzetben csak kétdimenziós határrétegről lesz szó (síkáramlás). A határréteg leíró egyenleteit a Navier-Stokes egyenletből vezethetjük le, feltéve, hogy a falra merőleges sebesség komponens ( $c_y$ ) sokkal kisebb, mint a fallal párhuzamos sebesség összetevő ( $c_x$ ), illetve, hogy a 16.1 ábra jelölései szerint  $\partial(\ )/\partial x \ll \partial(\ )/\partial y$ , továbbá a vizsgált határrétegbeli áramlás stacionárius és végül, a térerő hatása figyelmen kívül hagyható és hőáram sincs. A részletes levezetés pl. [10]-ben megtalálható, a végeredmény:

$$0 = -(1/\rho)(\partial p/\partial y); \quad (16.1/a)$$

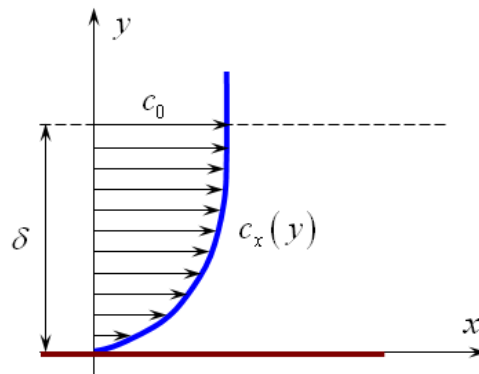
$$c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t \frac{\partial c_x}{\partial y} \right); \quad (16.1/b)$$

A (16.1) két egyenletből álló differenciálegyenlet rendszert összenyomhatatlan közeg esetére a folytonosság törvényének következő alakjával kell kiegészíteni:

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0; \quad (16.2)$$

A (16.1) és (16.2) differenciálegyenlet rendszer szigorúan véve az „ $x$ ” koordináta-tengely mentén elhelyezkedő, egyenes fal esetén érvényes. A gyakorlatban azonban kiscörbületű falak esetében is alkalmazzák. A határréteg pedig (sebesség profiljának vázlata a 16.1 ábrán látható) az „ $y$ ” tengely mentén ( $c_x = c_x(y)$ ) alakul ki.

A (16.1)-ben szerepel a turbulens kinematikai viszkozitás is, így az a turbulens határrétegekre is érvényes lesz. E tekintetben persze nagyon fontos (és az érvényességet meghatározó) az, hogy milyen turbulencia modellt alkalmazunk.



16.1. ábra – A határréteg sebesség profilja

A (16.1)-ben a Navier-Stokes egyenlet két komponens egyenlete látható, a felső sorban az „ $y$ ”, az alsó sorban az „ $x$ ” iránybeli egyenlet szerepel. Az első egyenlet igen egyszerű, számolni vele lényegében nem szükséges – fizikai mondandója azonban igen-igen fontos: eszerint a statikus nyomás a határrétegen keresztül nem változik. Vagyis a határréteg ebből a szempontból nagyon kedvezően viselkedik. Példaként említve, egy test felszínén kialakuló statikus nyomást az ideális közeg áramlási viszonyai alapján számíthatjuk – úgy, hogy a test méreteit a később tárgyalandó kiszorítási vastagsággal megnöveljük. Ez egyébként, a korábban említett, ún. hibrid módszerek felépítését lehetővé tévő egyik alap gondolat.

A határréteg vastagsága ( $\delta$ ) többféleképpen definiálható. Az első definíció szerint azt az „ $y$ ” koordináta értéket tekintjük a határréteg vastagságának, ahol a sebesség már csak (pontosan) 1%-kal tér el a zavartalan áramlási sebességtől. Ezt a vastagságot a szakirodalomban „99%-vastagság”-nak is nevezik. Ez a vastagság általában az „ $x$ ”, fal menti koordináta függvénye, méghozzá mind lamináris, mind turbulens határréteg esetén ez a vastagság az áramlási hosszal definiált Reynolds szám értékének növekedésével nő.

Lamináris határréteg esetén – Blasius – nyomán a határréteg eme vastagságát az alábbi képlettel közelíthetjük:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} = 5 \sqrt{\nu \frac{x}{c_0}}; \text{ ahol } : Re_x = \frac{c_0 x}{\nu}; \quad (16.3)$$

( $c_0$  a zavartalan áramlási sebesség)

Innen látható, hogy a lamináris határréteg vastagsága a fel mentén, az „ $x$ ”, fal menti koordináta növekedésével nő. Ez a (16.3) második alakjából, ahonnan a Reynolds számot kiküszöböltük, rögtön következik. A (16.3) kifejezés érvényességét feltételezve, a lamináris esetbeli fal csúsztató feszültséget is kiszámíthatjuk:

$$\tau_0 = 0.332\mu \frac{c_0}{x} \sqrt{Re_x} = 0.332\rho\sqrt{v} \frac{c_0^{3/2}}{\sqrt{x}}; \quad (16.4)$$

(16.4)-ből pedig az állapítható meg, hogy a fal csúsztató feszültség az „ $x$ ”, fal menti koordináta növekedésével csökken.

Turbulens határréteg esetén, a turbulens rész sebesség-eloszlásának közelítésére az alábbi formulát (is) használhatjuk (a lamináris alréteg – 16.2 ábra – számítására később térünk ki):

$$\frac{c(y)}{c_0} = (y/\delta)^{1/7}; \quad 10^5 < Re < 10^7 \quad (16.5)$$

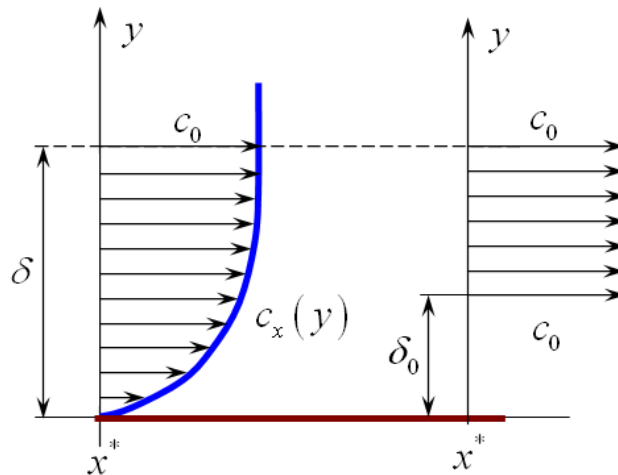
A turbulens határréteg vastagsága – a szakirodalom nyomán az alábbi képlettel közelíthető:

$$\delta = \frac{0.37x}{Re_x^{1/5}}; \quad ha \quad Re_x < 10^7 \quad (16.6)$$

A fal csúsztató feszültség, turbulens esetbeli közelítése pedig a következő módon lehetséges:

$$\tau_0 = \frac{0.058}{Re_x^{1/5}} \rho \frac{c_0^2}{2}; \quad ha \quad Re_x < 10^7 \quad (16.7)$$

Kiszámíthatjuk a határréteg **kiszorítási vastagságát** is, amely, a 16.2 ábra szerint az a faltól mért távolság, amennyivel az áramlásnak a faltól távolabb kellene kezdődnie ahhoz, hogy az adott „ $x^*$ ” koordinátánál állandó sebesség mellett ugyanaz a térfogat-áram haladjon át.



16.2. ábra – A kiszorítási vastagság

Írjuk fel a térfogat-áram egyenlőségét:

$$\dot{V} = \int_0^{\infty} c_x(y) dy = \int_{\delta_0}^{\infty} c_0 dy = \int_0^{\infty} c_0 dy - \int_0^{\delta_0} c_0 dy = \int_0^{\infty} c_0 dy - c_0 \delta_0; \quad (16.8)$$

A (16.8) jobb oldalán az állandó sebességgel vett térfogat áram kifejezése látható. Innen a kiszorítási vastagság egyszerűen megkapható:

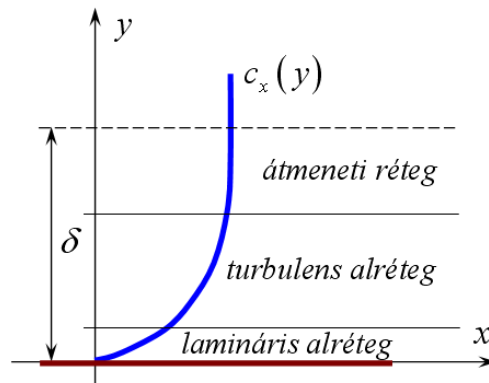
$$\delta_0 = \frac{1}{c_0} \int_0^{\infty} (c_0 - c_x(y)) dy = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{c_x(y)}{c_0}\right) dy ; \quad (16.9)$$

A (16.9)-ben kijelölt integrál elvileg nullától végtelenig számítandó, a gyakorlatban azonban a számítás jóval kisebb „y” értéknél abbahagyható, hiszen az integrálandó függvény értéke gyakorlatilag zérus lesz.

A szakirodalomban értelmezik még az impulzus és az energia vastagságot is. Ezekkel, az itt nem részletezett a mennyiségekkel szokás pl. a határréteg alak-paramétereit definiálni – az alak paraméterek pedig a határréteg viselkedésének jellemzésére (pl. lamináris-turbulens átmenet, leválás) használatosak.

## 16.2. Sebesség-eloszlás a határrétegben

A 16.3. ábrán egy határréteg részletes sebesség-profilja látható. Az állónak feltételezett faltól indulva („x” tengely), ahol az áramlási sebesség a tapadási feltétel miatt nulla, található egy, vékony, lamináris alréteget. Ez egy, a falhoz olyan közel kialakuló réteg, ahol a turbulens mozgás – éppen a fal simító hatása miatt – még nem tud kialakulni.



16.3. ábra – Határréteg részletes sebesség-profilja

Ezután következik, általános esetben – gomolygó határréteg esetén – a turbulens alréteg. Végül a turbulens réteg egy átmeneti rétegen keresztül megy át a „végtelen” vagy zavartalan áramlásba, ahol már csúsztató feszültség (lényegében) nem ébred. Az ábrán „ $\delta$ ” a (pl. 99%-os) határréteg vastagságát jelenti.

Vizsgáljuk meg ennek a határrétegnek a sebesség profilját. Prandtl nyomán tegyük fel, hogy a lamináris és a turbulens alrétegben a csúsztató feszültség nem változik, végig egyenlő a fali csúsztató feszültséggel:

$$\tau = \tau_0 \text{ (}\tau_0 \text{ a fali csúsztató feszültség)}$$

Definiáljuk a súrlódási sebességet az alábbi módon (a súrlódási sebesség „köze” a sebességekhez csak annyi, hogy a dimenziója sebesség-dimenzió):

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (16.10)$$

Határozzuk meg a lamináris alréteg sebesség-profilját. Ezt a lamináris áramlásra érvényes csúszató feszültség alapegyenletéből kiindulva tehetjük meg:

$$\begin{aligned}\tau = \tau_0 = \mu \frac{dc_x}{dy} &\Rightarrow \frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{dc_x}{dy} \Rightarrow (u^*)^2 = \nu \frac{dc_x}{dy} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dc_x}{u^*} = \frac{u^*}{\nu} dy;\end{aligned}\quad (16.11)$$

A fenti egyenlet mindkét oldala, a második sorban írt alakban dimenziótlan. Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned}\int \frac{dc_x}{u^*} = \int \frac{u^*}{\nu} dy &\Rightarrow \frac{c_x}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu}, \quad u^+ = \frac{c_x}{u^*}, \\ y^+ = \frac{u^* y}{\nu} &\Rightarrow u^+ = y^+, \quad \text{ha } u^+ = y^+ \leq 10;\end{aligned}\quad (16.12)$$

Vagyis a lamináris alrétegben a sebességprofil egyenlete szerint a dimenziótlan sebesség egyenlő a dimenziótlan távolsággal. Ezek értéke nullától közelítőleg tízig változik. A tízes értéknél kezdődik az átváltás a lamináris alrétegből a turbulens alrétegbe – ez a folyamat kb. az  $y^+ = 30$  – as értéknél fejeződik be. Az integrálás miatt egy állandó is bekerült (16.12)-be, azonban könnyen belátható, hogy a nulla dimenziótlan koordinátánál a dimenziótlan sebesség nulla – így az állandó értéke is nulla, ezért azt nem írtuk ki.

A turbulens alrétegben a Prandtl hipotézisek ((15.11) és (15.12)) segítségével számíthatjuk ki a sebesség-profil:

$$\tau = \tau_0 = \mu_t \frac{dc_x}{dy} \Rightarrow \frac{\tau_0}{\rho} = \nu_t \frac{dc_x}{dy} \Rightarrow (u^*)^2 = \kappa^2 y^2 \left| \frac{dc_x}{dy} \right| \frac{dc_x}{dy}; \quad (16.13)$$

Feltéve, hogy az áramlás nem válik le, azaz a sebesség iránya nem változik, az abszolút érték elhagyható. (Leválás esetén az áramlás falhoz viszonyított iránya az ellenkezőjére fordul.) Az abszolút érték elhagyása után viszont minden (16.13)-beli tag a négyzetben lesz, négyzetgyökvonás után írható:

$$u^* = \kappa y \frac{dc_x}{dy} \Rightarrow \frac{dc_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{c_x}{u^*} = u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y) + \text{állandó}; \quad (16.14)$$

Ennek az egyenletnek a jobb oldalára ismét behozható a dimenziótlan távolság, csak ekkor egy másik állandóra lesz szükség (ezt a másik állandót a középső sorban, a szögletes zárójelbe írt tagok jelentik; ennek egyik gyakori számértékét rögtön beírjuk):

$$\begin{aligned}\frac{c_x}{u^*} = u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y) + \text{állandó} &\Rightarrow u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u^* y}{\nu}\right) + \left[ -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u^*}{\nu}\right) + \text{állandó} \right]; \\ &\Rightarrow u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5.5;\end{aligned}\quad (16.15)$$

Ez a nevezetes, logaritmusos faltörvény, ami a turbulens áramlások vizsgálatának egyik korai eredménye, és amely törvényt mind a mai napig, a legkorszerűbbnek tekintett numerikus vizsgálatokban is alkalmazzák. Az összefüggés a  $30 \leq y^+ \leq 10^5$  értékig ( $u^+ \leq 37.5$ ) alkalmazható.

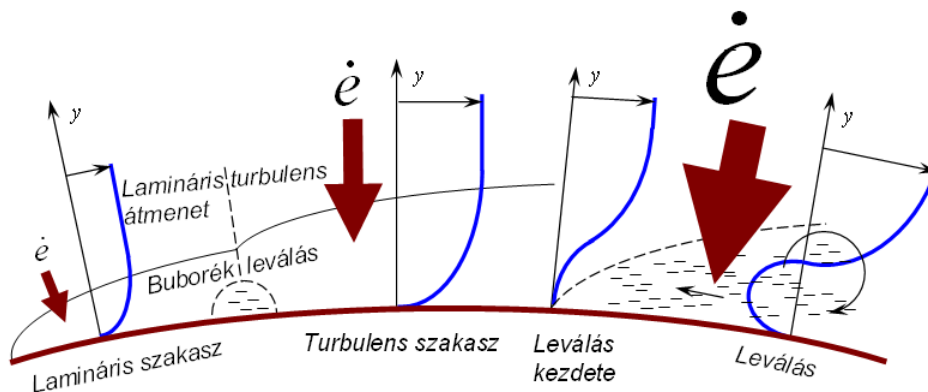
A lamináris alréteg, illetve a turbulens alréteg sebességprofiljával bővebben pl. [1], a „Súrlódásos folyadék áramlásának törvényei” c. részben foglalkozik. Az átmeneti réteg vizsgálatával e jegyzetben nem foglalkozunk – az érdeklődő bőséges szakirodalmat találhat, amely a határréteggel részletesen foglalkozik.

Napjainkban a határréteg jellemzőit (is) sok esetben numerikus módszerekkel számítják. E numerikus módszerek közül az egyik legegyszerűbb, a véges differenciákon alapuló, explicit sémára vezető megoldási módszer, amelyet [10] mutat be.

### 16.3 A határrétegbeli áramlási formák változása

A határréteg szilárd fal mellett jön létre. A határrétegre jellemző, hogy benne csúsztató feszültségek keletkeznek, illetve ezzel kapcsolatosan – ahogyan azt a bevezetőben már leírtuk – örvények keletkeznek. E folyamat során, a határrétegben, a falra merőleges irányban anyag, mozgásmennyiség, energia transzport, illetve hőáram is létrejön.

A szilárd fal és a közeg között kialakuló csúsztató feszültség, amely az áramlást (általában) fékezi, egyúttal energiát is elvon a közegtől. (Speciális esetekben, megfelelő módon mozgó fal energiát is közölhet.) További, igen fontos energia igényt jelent a nyomásnövekedés.



16.4. ábra – A határréteg szakaszai, leválások

Az energiaáram, természetesen, csak olyan mértékben lehetséges, amelyet a határréteg áramlási viszonyai megengednek. Ennél nagyobb energia elvonás, energia igény esetén az áramlás jellege megváltozik, úgy, ahogyan azt az energia elvonás vagy igény szükségessé teszi.

A réteges vagy lamináris határrétegben az energia transzport a rendezetlen hőmozgás révén jön létre. Mivel ez viszonylag kevésbé intenzív, ezért ez az áramlási forma igen hamar véget ér, akkor is, ha nincs nyomásnövekedés. Nyomáscsökkenés esetén ez a fajta határréteg persze tovább fennmaradhat.

A lamináris-turbulens átmenetet igen egyszerű esetekben valamely (kritikus) Reynolds számmal jellemezhetjük – a valósághoz jobban közelítő esetekben összetettebb – itt nem tárgyalható – kritériumok alapján dönthető el az átmenet helye. Azt azért el kell mondani, hogy a kísérletek tanúsága szerint a valóságban ez az átmenet egy bizonyos tartományon belül, előre-hátra vándorol, igazából nincs egyetlen átmenet-pont, hanem általában egy zónát lehet kijelölni. Adott esetben, ahol ez a fontos, lehet átmeneti pontot előállítani, például egy, a felületen elhelyezett

turbulenciát keltő objektummal. (Ilyen lehet például a zárt téri repülő modellek szárnyának belépő élénél, a belépő éllel párhuzamosan elhelyezett cérnaszál, amely az ebben az esetben létrejövő, igen kis sebességű – ezért alacsony Reynolds számú – határréteget turbulenssé teszi. De ilyen példa a Természetből egyes repülő rovarok szárnya is, amelyeken szintén turbulenciát keltő részeket találunk.)

A lamináris szakasz végén – amennyiben olyanok az áramlási viszonyok (pl. erősen görbült belépő élű szárnyprofil első, felső szakasza), ahol a nyomásnövekedés is jelentős – előállhat (*de csak speciális körülmények esetén*) buborék leválás. Ebben az esetben az áramlás nem tudja a kontúrt tovább követni és leválik (az eredetivel ellentétes irányú, visszaáramlás indul meg a fal mellett). Ez a buborék leválás egyúttal a turbulens szakasz kezdete is lesz. Mivel a turbulens szakaszban az energia transzport a turbulens sebesség-ingadozásokon keresztül valósul meg, ezért ez az energia transzport sokkal (esetenként több nagyságrenddel) intenzívebb, mint a lamináris szakaszon volt. Ez az energia transzport általában képes az áramlást visszasimítani, ezzel a buborék leválást megszünteti. Ezt a fajta leválást éppen ezért nevezzük buborék leválásnak, mivel viszonylag rövid szakasz után véget is ér. A 16.4 ábrán csak a teljesség kedvéért tüntettük fel a buborék leválást is, ez a fajta leválás *nem minden esetben jön létre!* Sőt a gyakorlatban előforduló esetek igen nagy részében *nem* találkozunk vele!

A turbulens határrétegben létrejövő energia transzport sok esetben a teljes kontúr menti áramlás követéséhez elegendő, illetve ilyenkor az áramlás nem válik le, végig követi az áramvonalas test alakját. Ilyen lehet például egy mérsékelt állásszögön működő szárnyprofil körüli áramlás.

Előfordul azonban, hogy a test kontúrja mentén olyan erősen növekszik a nyomás, hogy a turbulens energia transzport sem képes az áramlást fenntartani. Az energia fogyását a határréteg sebesség profilja jelzi: a testhez közeli rétegekben a sebesség és ezzel a kinetikai energia csökken – a 16.4 ábra szerinti, a „Leválás kezdete” jelzésű helyen a sebesség-profil érintője a falra merőleges lesz. Ez azt jelenti, hogy itt a csúsztató feszültség értéke nullára csökken. Ettől a ponttól kezdve alakul ki a leválási zóna, ahol akár makroszkopikus méretű örvények is előállhatnak.

A leválási zónában, az igen intenzív örvénylés elegendően nagy energia áramot biztosít, így ez az áramlási forma – az általunk vizsgált területeken – már mindenütt elegendő, ennél tovább nem kell mennünk. Az áramlás leválása és az ezzel kapcsolatos örvények számos, komoly technikai problémát okoznak – ilyen lehet például egy repülőgép szárnyról, a leválás miatt leúszó örvények gerjesztő hatása következtében, a farokfelületen előálló rezgés.

A leválást különböző módszerekkel szabályozni, késleltetni lehet: a határréteg elszívásával például az energiáját veszített közeg helyére friss közeg kerül. Egy másik lehetséges eljárás szerint a határrétegbe nagy energiájú (rendszerint nagy sebességű) közeget juttatva szintén késleltethető a leválás. Ezt az eljárást határréteg lefúvásnak is nevezik.

A határréteg lamináris (réteges) vagy turbulens (gomolygó) jellege a teljes test körüli áramlásra is, adott esetben igen jelentős mértékben visszahat. Ezért a határrétegbeli áramlás változtatásával, viszonylag kis energiával például jelentős erő- (nyomaték) változást idézhetünk elő.

A 18. pontban vizsgált, henger körüli áramlás esetén az áramképet, és ezzel a nyomáseloszlást illetve az ellenállás tényezőt is igen nagy-mértékben módosítja a határréteg jellege. A kritikus Reynolds szám feletti áramlásban, amikor a kezdeti lamináris határréteg után egy turbulens szakasz is kialakul, az ellenállás tényező értéke hirtelen, jelentős mértékben lecsökken. Ennek a ténynek a gyakorlati vonatkozásokon túl még mérés-technikai vonatkozása is van – így lehet pl. a turbulencia faktort mérni.

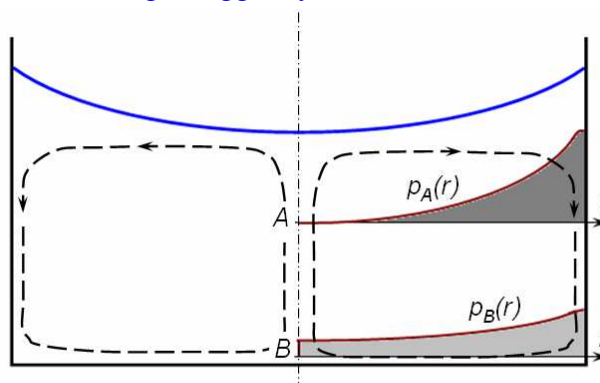


Az egész áramlási kép megváltoztatása a határréteg befolyásolásával más esetekben is előbukkan. Jelentős lehet például az az eljárás, amelynek során a helyi csúsztató feszültség mérése alapján aktív eszközökkel befolyásoljuk (rendszerint turbulenssé tesszük) a kialakuló határréteget.

## 16.4 Határréteg okozta másodlagos – szekunder - áramlás

A határréteg több esetben másodlagos, idegen szóval szekunder áramlást kelt. Ezt a 16.5. ábrán látható példával illusztráljuk. A példában egy kör keresztmetszetű, álló edényt vizsgálunk, amelyben a valóságos közeg közel merev testszerű forgómozgást végez. A merev testszerű forgómozgás jelentse azt, hogy a közeg döntő része állandó szögsebességgel forog, ettől csak a fal mellett kialakuló határréteg sebesség-eloszlása különbözik.

A példa jelenthet mondjuk egy csészét, amelyben kanállal megkevert folyadék mozog. Vizsgáljuk ebben a közegben két, a forgástengelyre merőleges és egyúttal vízszintes szintet, illetve e szinteken a nyomás változását, a sugár függvényében.



Álló, kör keresztmetszetű edény (pl. csésze), benne forgómozgást végző sűrűdásos folyadék.

16.5. ábra – Másodlagos áramlás forgó közegben

A felső szinten („A”) – amelyik az edény belsejében van, valamelyest mélyebben, mint a felszín és távolabb az alsó faltól – azt tapasztaljuk, hogy a centrifugális erőter hatására a nyomás a sugáron kifelé haladva nő. Ezek szerint ez, a felső szint tulajdonképpen – a fent leírt korlátok között – az edényben bárhol elhelyezkedhet.

A hidrosztatikában tanultak alapján kimondhatjuk, hogy a szabad felszínen a nyomás állandó (egyenlő a környezeti nyomással) – az ebben az esetben kialakuló paraboloid felszín jelzi az a növekvő folyadék-oszlopot, ami másik oldalról alátámasztja a sugár menti nyomás-növekedést.

Az alsó szintet („B”) úgy választottuk, hogy az a vízszintes, alsó falnál kialakuló határréteg belsejében legyen. Itt még van sebesség növekedés (de sokkal mérsékeltebb, mint a szabad térben) és ezzel nyomásnövekedés is, ez azonban a határrétegen kívüli nyomás-növekedéshez képest kicsi.

Ezek alapján kialakul az ábrán vázolt helyzet: az edény fala mellett az „A” szinten nagyobb a nyomás, mint a „B” szinten – ezért a fal mellett lefele tartó másodlagos (szekunder) áramlás indul meg.

Az edény közepén pedig a folytonosság törvényének megfelelően felfele irányuló másodlagos áramlás indul meg. Végeredményben kialakul a 16.5 ábrán vázolt másodlagos áramlási „kör”, ebben a közeg a fal mellett lefele, az edény fenekénél befele, közepén felfele és fenn kifelé áramlik

Megjegyezzük, hogy a nyomáseloszlások ábrázolásánál törekedtünk arra, hogy látható legyen: a statikus nyomás a határrétegen keresztül lényegében nem változik. Másrészt a fent vázolt kép ugyan megfelel az ilyen esetben, a gyakorlatban tapasztalható áramlásnak, azonban a részletes (számszerűen helyes) nyomás- és sebesség-eloszlás vizsgálat az itt leírtaknál sokkal több munkát igényel. Feltehetőleg leginkább valamely numerikus eljárással lehetne egy ilyen problémát korrekt módon kezelni.

## Mintafeladat

**Feladat:** víz áramlásakor kialakuló határréteg turbulens alrétegében, az  $y^+ = 5000$ -nél a fizikai sebesség  $u = 0.3 \text{ m/s}$ . Határozza meg a fali csúsztató feszültséget és a lamináris alréteg dimenziós vastagságát. (A lamináris alréteg  $y^+ = 10$ -ig tart, a kinematikai viszkozitás:  $\nu = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ; és  $\kappa = 0.4$ ).

**Megoldás:** a logaritmusos faltörvény (16.15) szerint kiszámítható az  $y^+ = 5000$ -hez tartozó, dimenziótlán sebesség:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5.5 = \frac{1}{0.4} \ln(5000) + 5.5 \cong 26.8; \quad (16.16)$$

A súrlódási sebesség (16.10) szerint számítható:

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \Rightarrow u^* = \frac{u}{u^+} = \frac{0.3}{26.8} = 0.0112 \text{ m/s}; \quad (16.17)$$

A fali csúsztató feszültség (16.10)-ből kifejezhető:

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \Rightarrow \tau_0 = \rho (u^*)^2 = 1000 \cdot 0.0112^2 = 0.125 \text{ Pa}; \quad (16.18)$$

Végül, a lamináris alréteg dimenziós vastagságát számítjuk ki, a (16.12)-ben szereplő definíció felhasználásával:

$$y^+ = \frac{y u^*}{\nu} \Rightarrow \quad (16.19)$$

$$\Rightarrow y = \frac{y^+ \nu}{u^*} = \frac{10 \cdot 1.3 \cdot 10^{-6}}{0.0112} = 0.00116 \text{ m} = 1.16 \text{ mm};$$

A [7] példatárban – sajnos – határréteggel foglalkozó példa nem található. Ennek oka az is, hogy a határrétegek jellemzőit napjainkban legtöbbször numerikus módszerekkel határozzák meg.

Egy igen egyszerű, véges differenciákat felhasználó numerikus módszer található [10]-ben.

## 17. A kiterjesztett Bernoulli egyenlet

A Bernoulli egyenlet ideális közegre érvényes, általános alakját (7.19) láttatja. A Bernoulli egyenletnél igen fontos feltétel, hogy a két pont között, amelyek közé az egyenletet felírjuk, nem lehet energia be- vagy elvezetés.

A súrlódás energiaelvezetést jelent, ezért a Bernoulli egyenletet ki kell egészíteni az energia megmaradás elvének megfelelően úgy, hogy a súrlódási veszteséget hozzáadjuk annak a pontnak a jellemzőihez, ahonnan az hiányozna. Az így felírt egyenletet nevezzük kiterjesztett Bernoulli egyenletnek. Induljunk ki (12.2)-ből és adjuk hozzá a „2”-es pont jellemzőihez a súrlódási

veszteségeket összefoglalóan kifejező  $\sum \frac{\Delta p'}{\rho}$  tagot:

$$\frac{c_1^2}{2} + U_1 + \frac{p_1}{\rho} = \int_1^2 \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T d\mathbf{s} + \frac{c_2^2}{2} + U_2 + \frac{p_2}{\rho} + \sum \frac{\Delta p'}{\rho}; \quad (17.1)$$

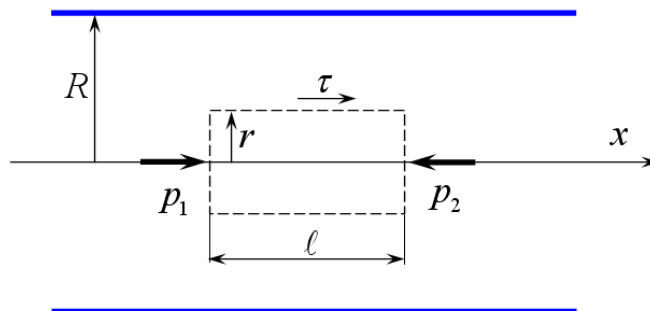
A (17.1) felírásakor igen fontos hangsúlyozni azt, hogy e felírási mód esetén az áramlásban az „1”-es pontot követi a „2”-es. A súrlódási veszteségek az „1”-es ponttól a „2”-es pontig lépnek fel. A veszteségek figyelembe vételével állítjuk helyre az egyenlőséget. A következőkben a súrlódási veszteségeket számítjuk ki, a gyakorlatban legfontosabb esetekre.

### 17.1. Hosszú, egyenes cső nyomásveszteségének számítása

Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor a hengeres csőben lamináris az áramlás. A 17.1 ábrán látható cső-áramlásban gondolatban egy hengert határoltunk el. Legyen az áramlás stacionárius, ezért a gondolatban elhatárolt hengerre ható, nyomásból, illetve súrlódásból származó erők egyensúlyban vannak.

A 17.1 ábrán és a számítás első lépésében a csúszató feszültséget – automatikusan – pozitívnak választottuk. A további számításokból kiadódik a csúszató feszültség negatív előjele – de ezt nem nekünk kell előírnunk, hanem a számítás szolgáltatja majd (17.7). Írjuk fel a hengerre ható erőket (ez az impulzus tétel ide vonatkozó alakja alapján – 7.9 egyenlet bal oldala és a jobb oldal harmadik és negyedik tagja, azonosan nulla):

$$0 = (p_1 - p_2) r^2 \pi + \tau 2\pi r \ell; \quad \text{ahol: } \tau = \mu \frac{dc_x}{dr}; \quad (17.2)$$



17.1. ábra – Lamináris áramlás csőben

A (17.2)-ből, behelyettesítés és átrendezés után az alábbi közönséges differenciálegyenlethez jutunk:

$$-r(p_1 - p_2) = 2\ell\mu \frac{dc_x}{dr}; \quad (17.3)$$

Ezt az egyenletet, miután a változókat már szétválasztottuk, egy kis átrendezés után egyszerűen integrálhatjuk. Az eredmény egy integrálási állandó bevezetésével:

$$c_x(r) = -\frac{p_1 - p_2}{2\ell\mu} \frac{r^2}{2} + Const.; \quad \text{és a perem-feltétel: } c_x(R) = 0; \quad (17.4)$$

Az állandó értékét a (17.4)-nél megadott peremfeltételből (ti.:  $c_x(R) = 0$ ;) kiszámítva, az alábbi, forgási paraboloid egyenletének megfelelő egyenlettel meghatározott sebességeloszlást kapjuk:

$$c_x(r) = \frac{p_1 - p_2}{2\ell\mu} \frac{R^2 - r^2}{2}; \quad (17.5)$$

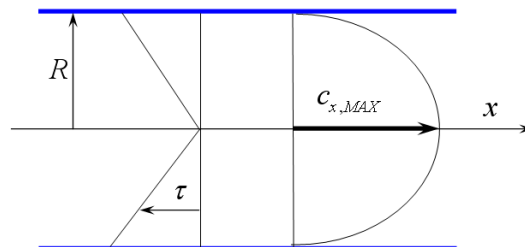
A sebesség eloszlás egyenlete hasonló a hidrosztatikában, a nehézségi erőterben forgó edényben kialakuló folyadék-felszín egyenletéhez (3.2 illetve 17.2 ábra), illetve a (3.12) kifejezés szerint a sebesség átlagértékének a maximális érték éppen a fele. Ennek alapján kiszámíthatjuk az átlagsebességet, ami ezért, természetesen a maximális sebesség fele. Az átlagsebességet a későbbiekre tekintettel egyszerűen „ $c$ ”-vel jelöljük, ez lesz ui. általában az átlagsebesség jele.

$$c = c_{x,ÁTLAG} = \frac{c_{x,MAX}}{2} = \frac{1}{2} \frac{p_1 - p_2}{2\ell\mu} \frac{R^2}{2}; \quad (17.6)$$

Egy egyenes, állandó keresztmetszetű csőben, állandó sűrűségű, súrlódásos folyadék esetében a nyomás az áramlás irányában csökkenni fog ( $p_1 > p_2$ ). Ez azt jelenti, hogy a (17.6)-tal adott sebesség-profil, illetve az ennek megfelelően, a 17.2 ábra jobb oldalán felvázolt sebesség eloszlás sebességei pozitív értékeket vesznek fel.

A csúsztató feszültség eloszlása és a fali csúsztató feszültség (17.7 jobb oldalán lévő kifejezés) értéke (17.3)-ből egyszerűen számítható:

$$\tau(r) = \mu \frac{dc_x}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\ell} r; \quad \tau_0 = -\frac{p_1 - p_2}{2\ell} R; \quad (17.7)$$



17.2. ábra – Csúsztató feszültség és sebesség eloszlás

A csúsztató feszültség a sugárral arányosan (lineárisan) változik, a középvonalon nulla, a falnál a legnagyobb. Előjele negatív – ez az áramlás sebesség-eloszlásából fizikailag következik, de a

negatív előjelet a számításból kapjuk – ez jól példázza a fizika és a matematika egységét. A 17.2 ábra jobb oldalán a korábban már említett, parabolikus (paraboloid) sebesség-eloszlás látható.

Fejezzük ki (17.6)-ból a nyomásveszteséget, illetve a nyomásveszteség és a sűrűség hányadosát:

$$\Delta p' = p_1 - p_2 = \frac{c 8 \ell \mu}{R^2} = \frac{c 32 \ell \rho \nu}{D^2}; \quad \frac{\Delta p'}{\rho} = \frac{c 32 \ell \nu}{D^2}; \quad (17.8)$$

A (17.8)-at, a Reynolds szám és a csősúrlódási tényező ( $\lambda$ ) bevezetésével a következő alakba is írhatjuk:

$$\frac{\Delta p'}{\rho} = \frac{c 32 \ell \nu}{D^2} = \frac{c^2}{2} \frac{2 \cdot 32}{(Dc/\nu)} \frac{\ell}{D} = \frac{c^2}{2} \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{D} = \frac{c^2}{2} \lambda \frac{\ell}{D}; \quad (17.9)$$

$$\text{ahol: } \text{Re} = \frac{Dc}{\nu} \text{ és } \lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

Ezzel valójában az állandó keresztmetszetű egyenes csőben történő, összenyomhatatlan folyadék áramlásában fellépő nyomásveszteség számításának általános kifejezéséhez is eljutottunk:

$$\frac{\Delta p'}{\rho} = \frac{c^2}{2} \lambda \frac{\ell}{D}; \quad \text{ahol: } \lambda \text{ a csősúrlódási tényező}; \quad (17.10)$$

A (17.10) kifejezést lamináris csőáramlásra vezettük le. Általános voltán azt értjük, hogy a későbbiekben, más esetekben is ezt a kifejezést használjuk a hosszú, egyenes csövekben előálló nyomásveszteség számítására. **A csősúrlódási tényező értékét az éppen vizsgált esetnek megfelelően határozzuk meg lamináris áramlásra, vagy hidraulikailag sima cső esetére:**

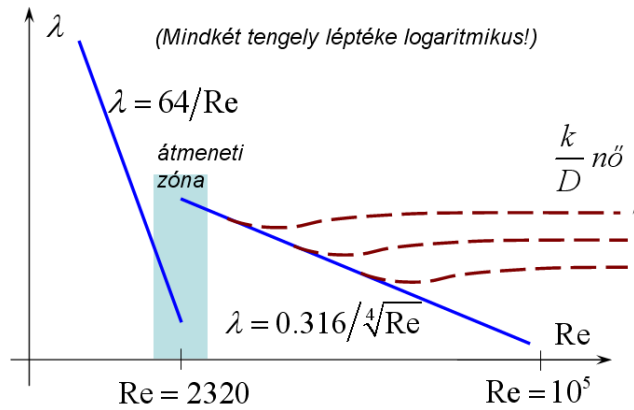
$$\begin{aligned} \lambda &= 64/\text{Re}, \quad \text{ha } \text{Re} < 2320, \text{ azaz lamináris áramlásban}; \\ \lambda &= 0.316/\sqrt[4]{\text{Re}}, \quad \text{ha } 2320 < \text{Re} < 8 \cdot 10^4 \text{ (Blasius képlete)}; \\ \lambda &= 0.0054 + 0.396 \text{Re}^{-0.3}, \quad \text{ha } 2 \cdot 10^4 < \text{Re} < 2 \cdot 10^6 \text{ (Schiller képlete)}; \\ \lambda &= 0.0032 + 0.221 \text{Re}^{-0.237}, \quad \text{ha } 10^5 < \text{Re} < 2 \cdot 10^8 \text{ (Nikuradse képlete)}; \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= 2 \log_{10}(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0.8, \quad \text{ha } 2320 < \text{Re} < 3.4 \cdot 10^8 \\ &\quad \text{(Prandtl – Nikuradse képlete)}; \end{aligned} \quad (17.11)$$

Turbulens áramlásban, érdes cső esetén is a (17.10) képletet alkalmazzuk, de a  $\lambda$  értékét a 17.3 ábrának megfelelő diagramból választhatjuk. Fontos észrevenni azt, hogy a gyakorlat számára elegendő, illetve megfelelő, ha a csősúrlódási tényezőt csak a Reynolds szám függvényeként vizsgáljuk.

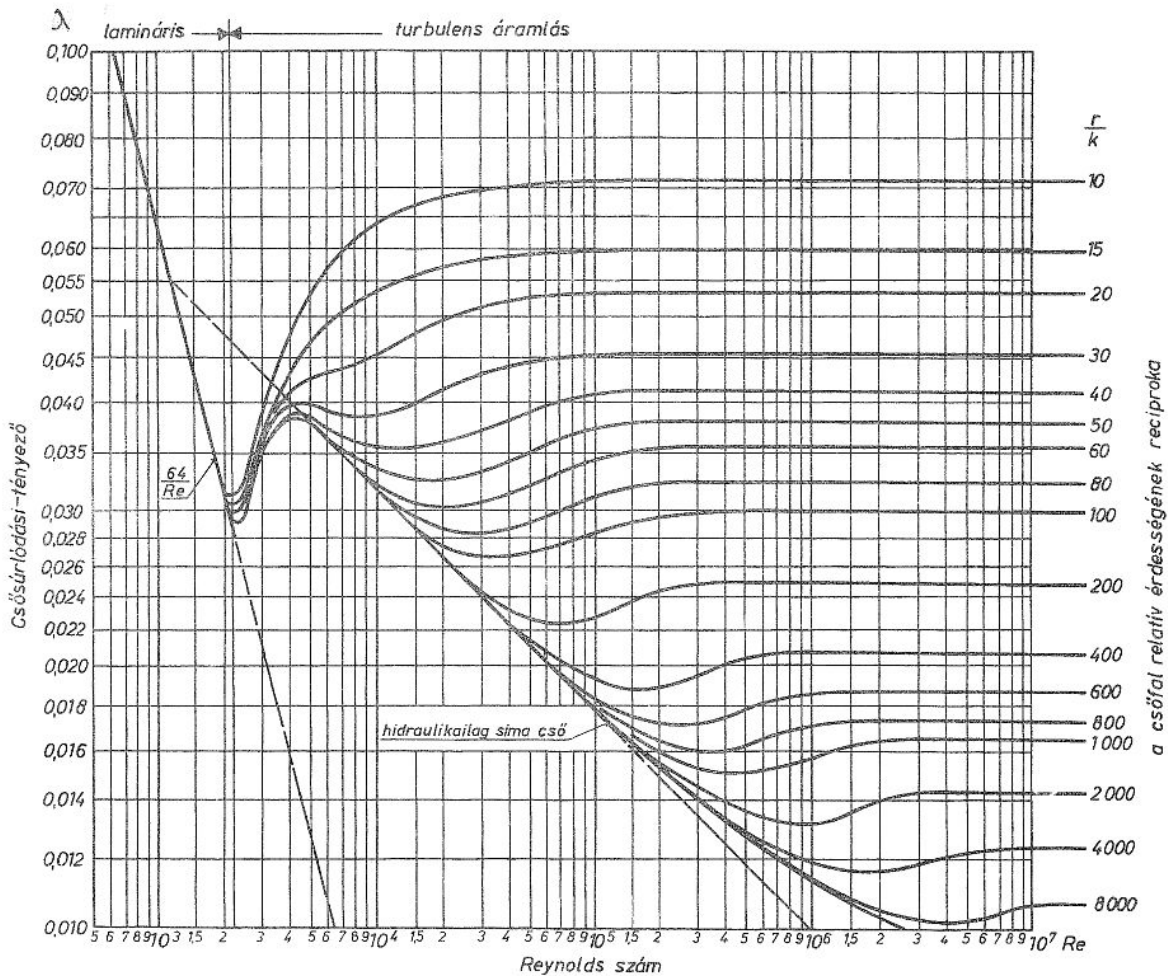
A (17.10) kifejezésnél megjelent a hidraulikai simaság fogalma. Ez a fogalom azt jelenti, hogy a felületi érdesség átlagos értéke ( $k$ ) kisebb, mint a határréteg lamináris alrétegének vastagsága ( $\delta$ ). Másképpen kifejezve, azt jelenti, hogy a hidraulikailag sima csőben a határréteg lamináris alrétege elfedi az érdességet.

Ez lamináris áramlás esetén mindig teljesül, hiszen az egész áramlás „határréteg” jellegű, a teljes keresztmetszetben van csúsztató feszültség (a csúsztató feszültség egyedül a középvonalon nulla). Ezek szerint a lamináris csőáramlás esetében a csövek mindig hidraulikailag simák.

Turbulens áramlás esetén a csőfal mellett viszonylag vékony határréteg alakul ki, illetve e határréteg lamináris alrétege az átlagsebesség (és a Reynolds szám) növekedésével vékonyodik. Vagyis adott átlagos érdességű csőfal ( $k$ ) esetén a csőfal, az átlagsebesség növekedésekor általában hidraulikailag érdekessé válik – ez is megfigyelhető a 17.3. ábrán. A 17.3/a. ábrán vázlatosan feltüntetett diagram egy, konkrét esetre vonatkozó változata a 17.3/b. ábrán tekinthető meg. A kör keresztmetszetű, érdes csövek esetére kidolgozott, ilyen diagramot a szakirodalomban Moody diagramnak is nevezik.



17.3/a. ábra – A csősúrlódási tényező – vázlatos ábra



17.3/b. ábra – A csősúrlódási tényező – konkrét esetre

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik a lamináris alréteg vastagsága, turbulens csőáramlás határrétegében. Használjuk fel e vizsgálathoz azt a megállapítást, ami szerint a lamináris alréteg az  $y^+ = 10$ -es értékig tart. Eszerint a lamináris alréteg dimenziós vastagsága (pl. (16.12) szerint):

$$y_\ell = 10 \cdot \nu / u^* \quad (17.12)$$

Tekintsünk egy " $\ell$ " hosszúságú csőszakaszt és írjuk fel a nyomásvesztésből, illetve a súrlódásból származó erők egyensúlyát, feltéve, hogy az áramlás stacionárius:

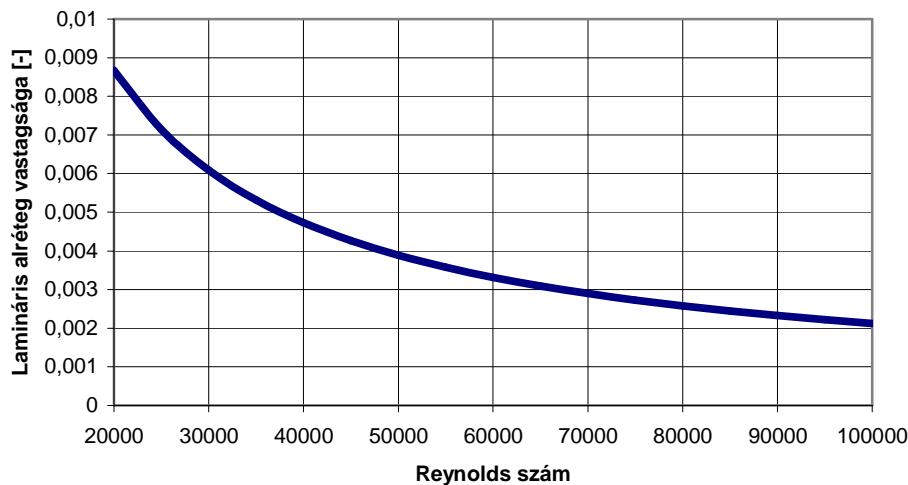
$$\Delta p' (d^2 \pi / 4) = \tau_0 (d \pi \ell) \quad (17.13)$$

Írjuk be (17.13)-ba a nyomásvesztés (17.10) szerinti kifejezését:

$$\frac{\rho}{2} c^2 \lambda \frac{\ell}{d} \frac{d^2 \pi}{4} = \tau_0 d \pi \ell \Rightarrow \tau_0 = \frac{\rho}{2} c^2 \frac{\lambda}{4}; \quad (17.15)$$

Helyettesítsük be (17.12)-be a súrlódási sebesség definiáló egyenletét (16.10) és a fali csúsztató feszültség (17.15)-tel adott kifejezését:

$$\frac{y_\ell}{d} = \frac{1}{d} 10 \cdot \frac{\nu}{u^*} = \frac{1}{d} 10 \frac{\nu}{\sqrt{\tau_0 / \rho}} = \frac{20\sqrt{2}}{Re\sqrt{\lambda}}; \quad (17.16)$$



17.4. ábra – A lamináris alréteg viszonylagos vastagsága a Reynolds szám függvényében

A csősúrlódási tényezőt hidraulikailag sima csövek esetében,  $10^5$ -es Reynolds számig a  $\lambda = 0.316 / \sqrt[4]{Re}$  kifejezésből (Blasius képlete) számíthatjuk. Helyettesítsük be ezt a (17.16)-ba:

$$\frac{y_\ell}{d} = \frac{20\sqrt{2}}{Re\sqrt{\lambda}} = \frac{20\sqrt{2}}{Re\sqrt{0.316/Re^{1/4}}} = \frac{50.3155}{Re^{7/8}}; \quad (17.17)$$

A (17.17) képletből a Reynolds szám függvényében kiszámítható a lamináris alréteg (*viszkózus alaprétegnek is nevezik*) csőátmérőhöz viszonyított vastagsága. Ezt tüntettük fel a 17.4 ábrán.

A Reynolds számot csak  $10^5$ -ig növeltük, mivel a csősúrlódási tényező számítására alkalmazott explicit formula (Blasius képlete) csak nagyjából eddig használható. De azért innen már megállapítható, hogy a lamináris alapréteg vastagsága a Reynolds szám növekedésével csökken. A

17.4 ábrán lévő, lamináris alréteg viszonyított vastagságot számértékre is helyesen tüntettük fel, azonban megjegyzendő, hogy az ábrán lévő legnagyobb Reynolds szám a gyakorlatban még igencsak kicsinek számít – vagyis a ténylegesen előforduló esetekben a lamináris alréteg viszonyított vastagsága ennél akár jelentősen is kisebb lesz.

A lamináris alréteg vékonyodása pedig azt jelenti, hogy adott átlagos érdesség a Reynolds szám növekedésével egyszer csak kiemelkedik a lamináris alaprétegből – vagyis a hidraulikai simaság megszűnik. A fenti megállapítás csak nagyon kis érdesség esetén nem igaz – a gyakorlatban ennyire sima felület alig található.

Az érdessé vált csövekben, egy, adott Reynolds szám felett a csősúrlódási tényező értéke lényegében állandó lesz. Mivel a gyakorlatban a csőáramlások Reynolds száma akár több (tíz)millió is lehet, azért a leggyakrabban ezzel, az állandó csősúrlódási tényező értékével számolunk. Valamely, konkrét csőáramlás vizsgálatakor, ezt az értéket célszerűen egy, a feladatra vonatkozó mérési eredményeket tartalmazó diagramról (táblázatból, egyéb adatbázisból) választhatjuk.

A kör keresztmetszetű, hidraulikailag sima csövekben, turbulens áramlás esetén érvényes csősúrlódási tényezőt, legáltalánosabban a (17.11)-ben leírt, „Prandtl-Nikuradse képlete” elnevezésű összefüggésből számíthatjuk.

Ez egy implicit kifejezés. Amennyiben a gyakorlatban alkalmazni kívánjuk, akkor a csősúrlódási tényezőt iterációval kell megkeresni. Egy ilyen, nem lineáris egyenletet megoldani nem túl bonyolult feladat.

Tekintsünk erre egy rövid példát. Válasszuk a számításhoz a SCLIAB szabad szoftvert. Válasszuk példaként a 95000-es Reynolds számot. Az alábbiakban összefoglaljuk azt a kis programot, ami a kívánt iterációt elvégzi:

```
// SCLIAB pelda a csosurlodasi tenyezo szamitasara
function F=csosurlodasi_tenyezo(lambda)
    F=1/lambda^0.5-2*log10(95000*lambda^0.5)+0.8;
endfunction
function J=csosurlodasi_deriv(lambda)
    J=-0.5/lambda^1.5-1/(lambda*log(10));
endfunction
ind=0.01; //ez az iteracio kiindulo erteke
[lambda,v,info]=fsolve(ind,csosurlodasi_tenyezo,csosurlodasi_deriv);
disp(lambda); // A keresett lambda erteke
disp(0.316/95000^0.25);
```

A számítás eredménye:

0.0181867 – ez az iterációval számított (lambda) érték;

0.0179993 – ez a Blasius képlettel számított érték.

Ebben a program környezetben, és így a példában is a megjegyzések jele: „/” – a két törtvonal. Elővigyázatosságból a megjegyzéseknél sem használunk ékezetes betűket.

Az első sor a program címe, a második-negyedik sor a Prandtl-Nikuradse képlet, átrendezett alakja; a megoldást az  $F(\lambda) = 0$  feltétel adja:



$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \cdot \log_{10}(Re\sqrt{\lambda}) + 0.8;$$

Az ötödik-hetedik sorba a fenti kifejezés deriváltját írtuk:

$$\frac{d}{d\lambda} F(\lambda) = -\frac{0.5}{\lambda^{1.5}} - \frac{1}{\lambda \cdot \ln(10)};$$

A nyolcadik sor az iteráció kiinduló értéke. Az ezután következő sor tartalmazza az iterációt automatikusan elvégző, SCILAB-eljárást (**fsolve**).

Végül a két utolsó sorban a program kiírja az iterált, illetve utána az ellenőrzés céljából, az explicit képlettel számított értéket. Ezeket a kereten belül, a program alatt fel is tüntettük. Az eredmények közelsége jól látható.

A példában választott Reynolds szám azért kicsi (95000), hogy a kétféle eredmény összevethető legyen. Egyébként a számítás, az utolsó sor elhagyásával, nagyobb Reynolds számra is elvégezhető. (Például,  $9.5 \cdot 10^6$ -os Reynolds szám esetén a  $\lambda \cong 0.00816$ -os eredményt kapjuk). A példa illusztrálja azt, hogy napjainkban, a számítástechnika régebben sok munkát igénylő megoldásokat is könnyen elérhetővé tesz. E tekintetben, a jövőben további, várhatóan hatalmas mértékű fejlődésre számíthatunk.

A kör keresztmetszetű csövek mellett léteznek más keresztmetszetek is, illetve előfordulhat, hogy az egyébként kör keresztmetszetű csövet a folyadék nem teljesen tölti ki. A Reynolds számot a cső átmérőjével definiáltuk (pl. 17.9-ben), ebben a definiáló egyenletben, ilyen esetekben a geometriai átmérő nem használható, helyette a hidraulikai átmérőt szokás alkalmazni:

$$D_H = \frac{4A}{K}; \quad (17.18)$$

(17.18)-ban, a számlálóban a folyadék keresztmetszete ( $A$ ), a nevezőben a nedvesített kerület ( $K$ ) található. A nedvesített kerület az a kerület-rész, amelyen a folyadék sűrűdése lényeges. Ez rendszerint az a kerület-rész, amit szilárd fal alkot. A hidraulikai átmérő, kör keresztmetszet és teljes kitöltés esetén (ez a műszaki gyakorlatban nagyon sok esetben igaz) a geometriai átmérővel azonos.

Téglalap keresztmetszetű csövek esetén, ha az oldalak viszonyára teljesül a  $a/b < 0.5$  feltétel (vagyis a keresztmetszet nem négyzet), akkor a Reynolds számot az alábbi, tapasztalati korrekciós tényezővel szokás számítani:

$$Re = \Phi \frac{D_H c}{\nu}; \quad \text{ahol: } \Phi \cong \frac{2}{3} + \frac{11}{24} \frac{a}{b} \left( 2 - \frac{a}{b} \right); \quad (17.19)$$

A (17.13)-ban bevezetett,  $\Phi$  korrekciós tényező értéke  $a/b = 0.1$ -nél kerekén 0.75,  $a/b = 0.9$ -nél pedig 1.125. Ezek szerint a lapos téglalap keresztmetszetek esetén – a sarkok okozta áramlástanai problémák következtében – alacsonyabb Reynolds számmal és ezzel (esetleg) magasabb csősűrűdési tényezővel kell számolni.

Az egyenes csövek nyomásvesztésének számításakor – különösen rövidebb csőszakasz esetén szerepet játszhat a belépési veszteség. Ez részben függvénye a belépő szakasz

kialakításának (éles szél, vagy lekerekített kiképzés), részben függvénye az áramlás jellegének (lamináris vagy turbulens). A belépési veszteséget – több, más veszteséghez hasonlóan – az alábbi formában szokás számítani:

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} c^2 \zeta_{BE}; \quad (\zeta_{BE} - a \text{ belépési veszteség tényező}) \quad (17.20)$$

A  $\zeta_{BE}$  tényező értéke lekerekítetlen belépés és lamináris áramlás esetén akár 1.2 is lehet. Ezzel szemben turbulens áramlás és kis lekerekítés esetében ez az érték 0.05, vagy még kisebb is lehet. Ezekben az esetekben ez a veszteség a többihez képest elhanyagolható.

Az érdekesség kedvéért jegyezzük meg, hogy, a kör keresztmetszetű csövekben kialakult, turbulens áramlás sebesség-profilja, a Reynolds szám függvényében az alábbi módon közelíthető:

$$c(r) = c_{MAX} [1 - (r/R)]^n, \text{ ahol } R \text{ a cső sugara, és:}$$

$$n = \begin{cases} 1/6 & \text{ha } Re \approx 4 \cdot 10^3; \\ 1/7 & \text{ha } Re \approx 1 \cdot 10^5; \\ 1/10 & \text{ha } Re \approx 3 \cdot 10^6; \end{cases}$$

## 17.2 A kontrakció és a mérőperem

A 11. fejezetben foglalkoztunk a Borda féle, éles szélű kilépő nyílással. Bevezettük ott a kilépő sugár összehúzódását jellemző, (11.27) kifejezéssel definiált,  $\xi$  elnevezésű kontrakciós tényezőt. A 11. fejezetben tárgyalthoz hasonló az a sugár összehúzódás is, ami a fenti, 17.1 pont befejező részében tárgyalt belépési veszteséghez vezető áramképet jellemzi. A sugár összehúzódás, azaz kontrakció más esetekben is fontos lesz. Itt a mérőperemen keresztül áramló közeg viselkedését vizsgáljuk, ahol, a 17.5 ábrának megfelelően szintén kialakul a szóban forgó, sugár összehúzódás (kontrakció).

A 17.5. ábrán egy közelítőleg szabványos mérőperemet vázoltunk – ebben az esetben a nyomást ( $p_2'$  és  $p_2''$ ) közvetlenül a mérőperemet képező tárcsa két oldalánál kell mérni. (Természetesen a szabványos mérőperem pontos kialakítását, méreteit a megfelelő szabványból kell kiválasztani.)

A térfogat áramot jó közelítéssel az ideális közegekre vonatkozó Bernoulli egyenlet és a folytonosság törvénye alapján számíthatjuk:

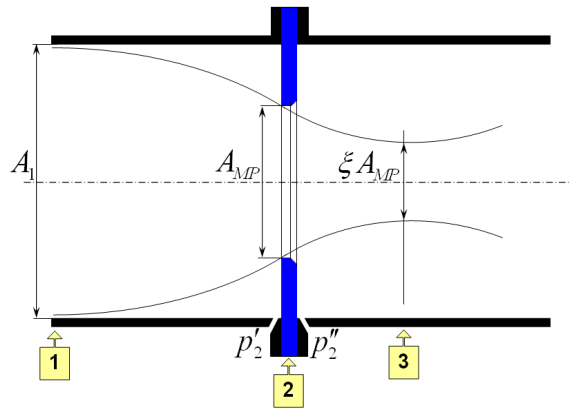
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + \frac{c_3^2}{2}; \text{ és } c_1 A_1 = c_3 \xi A_{MP}; \Rightarrow \frac{p_1 - p_3}{\rho} = \frac{c_3^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\xi A_{MP}}{A_1} \right)^2 \right];$$

Azaz:

$$\dot{V} = \xi A_{MP} c_3 = \xi A_{MP} \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_1 - p_3}{1 - \xi^2 m^2}}; \quad (17.21)$$

$$\text{ahol: } m = A_{MP} / A_1;$$

A fenti kifejezéssel kapcsolatban csak az a probléma, hogy a mérőperemnél mért nyomások nem azonosak a (17.21)-ben szereplő nyomásokkal. Megjegyzendő még, hogy függőleges mérés elrendezés esetén és pl. víz térfogatáram mérésekor a számításnál az esetleges térerősség hatását (magasság különbség) is figyelembe kell venni.



17.5. ábra – Mérőperemen kialakuló áramlás

A fent említett nyomásokkal kapcsolatos problémát egy, mérésekből származó (és a szabványban rögzített)  $\delta$  és  $\varepsilon$  tényező bevezetésével oldjuk meg:

$$\dot{V} = \frac{\xi \delta \varepsilon}{\sqrt{1 - \xi^2 m^2}} A_{MP} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_2' - p_2'')} ; \quad (17.22)$$

Végeredményben, a szakirodalomban szokásos kifejezést kapjuk:

$$\dot{V} = \alpha \varepsilon A_{MP} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_2' - p_2'')} ; \quad \text{itt } \alpha = \frac{\xi \delta}{\sqrt{1 - \xi^2 m^2}} ; \quad (17.23)$$

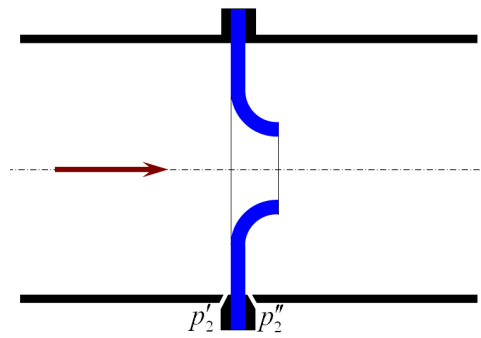
$\alpha$  – átfolyási szám;  $\varepsilon$  – expanziós szám;

Az  $\alpha$ , átfolyási számot általában az átmérő viszony ( $d_{MP}/d_1$ ) és a Reynolds szám függvényében határozzák meg. Az  $\varepsilon$  expanziós tényező a mért közeg összenyomhatósága miatt szükséges, több – itt nem részletezett – tényező függvénye. Amikor a közeg összenyomhatatlannak tekinthető (pl. folyékony folyadék vagy gáznemű közegek mérsékelt sebességű áramlása), akkor  $\varepsilon = 1$ .

A mérőperemek elhelyezhetők a 17.5. ábrán látható módon, egy, megfelelő csőszakasz belsejében. Gyakran alkalmazzák azonban az ún. beszívó mérőperemet, amely mérőperemet a csővezeték belépő keresztmetszetére szerelik fel.

A mérőperemek mellett alkalmaznak ún. mérőszájakat is – ezeknél a mérő elem kialakítása a 17.6. ábrán látható módon történik.

A mérőperemeket és a mérőszájakat általában térfogatáram mérésre használják. Itt csak a figyelmet hívhatjuk fel arra, hogy egy mérés esetében igen fontos a pontosság, illetve a mérési hiba ismerete. Megjegyzendő még, hogy a térfogatáram ilyenén történő mérése állandó nyomásvesztést okoz – vagyis alaposan megfontolandó, hogy mikor célszerű ezt a mérési módot alkalmazni.



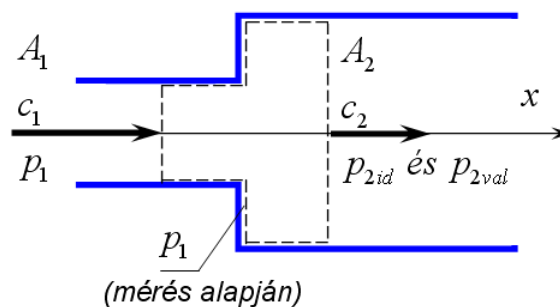
17.6. ábra – Mérőszáj

Ebben a jegyzetben nincs mód a térfogatáram másfajta és általában a további, egyébként igen érdekes áramlástani mérések tárgyalására. További ilyen érdeklődés esetén első sorban az irodalomjegyzékben felsorolt szakirodalom, illetve természetesen egyéb források tanulmányozását javasoljuk.

### 17.3. A Borda-Carnot veszteség

A csővezetékben előfordulnak hirtelen keresztmetszet növekedések. Ezekben nyomásvesztés alakul ki, mert az ábra szerint balról érkező áramlás nem képes a vezeték kontúrját követni, hanem egy örvénylő, holt tér alakul ki. A nyomásvesztésüket a 17.7 ábrán vázolt helyzetnek megfelelően határozzuk meg. Írjunk fel először ideális közegre érvényes Bernoulli egyenletet az „1”-es és „2”-es pont közé:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} &= \frac{p_{2id}}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} \Rightarrow p_{2id} - p_1 = \frac{\rho}{2}(c_1^2 - c_2^2) = \\ &= \frac{\rho}{2}(c_1 - c_2)(c_1 + c_2); \end{aligned} \quad (17.24)$$



17.7. ábra – A Borda-Carnot veszteség

Írjuk fel az impulzus tételt is – de ezt valóságos áramlásra. Az áramlás valóságos voltát úgy vesszük figyelembe, hogy az ellenőrző felületen, a hirtelen keresztmetszet növekedésnél  $p_1$  nyomást írunk elő. (Erre az ábrán a „mérés alapján” megjegyzéssel utaltunk). Válasszuk a 17.7 ábrán látható ellenőrző felületet, ekkor:

$$\begin{aligned} -c_1(\rho A_2 c_2) + c_2(\rho A_2 c_2) &= p_1 A_1 + p_1(A_2 - A_1) - p_{2val} A_2 = (p_1 - p_{2val}) A_2; \\ (\text{itt : } \dot{m} = \rho A_2 c_2 &= \text{állandó}); \end{aligned} \quad (17.25)$$

A valóságos nyomásnövekedés tehát:

$$p_{2val} - p_1 = (c_1 - c_2) \rho c_2 ; \quad (17.26)$$

A nyomásvesztés megkapjuk, ha az ideális nyomásnövekedésből kivonjuk a valóságot; ezzel a Borda-Carnot veszteség kifejezéséhez jutunk:

$$\Delta p' = (p_{2id} - p_1) - (p_{2val} - p_1) = \frac{\rho}{2} [(c_1 - c_2)(c_1 + c_2) - 2(c_1 - c_2)c_2] = \frac{\rho}{2} (c_1 - c_2)^2 ;$$

vagyis:

$$\frac{\Delta p'}{\rho} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} ; \quad (17.27)$$

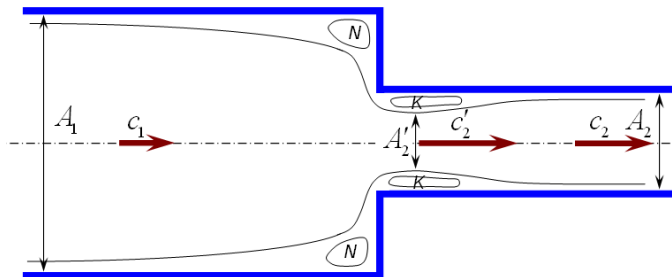
A Borda-Carnot veszteség azon alakját, amikor a kilépő keresztmetszet (gyakorlatilag) végtelen, tehát a  $c_2 = 0$ , kilépési veszteségnek nevezzük. Ez a kilépési veszteség számos esetben játszik jelentős szerepet. A kilépési veszteség egyébként azt jelzi, hogy az a mozgási energia, amit a közeg a kilépésekor magával visz, elvesz, nem tudjuk (egyszerűen) hasznosítani.

Másrészt utalunk itt arra a gyakorlatra, ami szerint a kilépő csővégeken gyakran alkalmaznak diffúzort. Ennek az az előnye, hogy a kilépő sebesség kisebb lesz és így a kilépési veszteség is csökken – ez elég jelentős lehet, hiszen ez a veszteség a sebesség négyzetével arányos.

A végtelen térbe kilépő sugár szabad sugár, ezért benne a statikus nyomás azonos a környezeti nyomással. Kilépő diffúzor alkalmazása esetén a sebesség csökken, vagyis a csőben a nyomás alacsonyabb lesz, mint a környezeti nyomás. Ez azt jelenti, hogy a kilépésnél alkalmazott diffúzor „megszívja a rendszert”, ezzel javítja annak gazdaságosságát.

A hirtelen keresztmetszet növekedés ellentéte a *hirtelen keresztmetszet csökkenés*. Ebben az esetben is keletkezik nyomás veszteség, mert a nyomás a fal mentén, az áramlás irányában mind az „N”, mind a „K” pont környezetében növekszik, ez pedig, a 17.8 ábrán vázolt áramképnek megfelelően, akár mindkét pont környezetében leválásokat okoz.

Az „N” ponttól távolabb, a belső részekben viszont az áramlás gyorsul – ezért itt nem keletkezik jelentős veszteség. A veszteség döntő része a „K” pont körüli leválás környékén keletkezik, főként azért, mert a belső áramlás itt lassul. Az áramlás az átmenetnél a Borda-Carnot veszteségnél vázolt áramképhez hasonlít, abban az értelemben, hogy az  $A_2'$  keresztmetszettől az  $A_2$  keresztmetszetig növekszik. Ez az áramkép egyébként a belépési veszteségnél vázolt áramképhez is hasonló.



17.8. ábra – Áramkép hirtelen keresztmetszet csökkenés esetén

Közelítsük a teljes nyomás veszteséget a Borda-Carnot veszteség és egy, egyéb nyomásvesztés összegével:

$$\Delta p'_{HK} = \frac{\rho}{2} (c'_2 - c_2)^2 + \Delta p'_{EGYÉB}; \quad (17.28)$$

Hanyagoljuk el a továbbiakban az egyéb veszteséget. Akkor a nyomásvesztés kifejezése a következő módon írható:

$$\Delta p'_{HK} = \frac{\rho}{2} c_2^2 \left( \frac{c'_2}{c_2} - 1 \right)^2 = \frac{\rho}{2} c_2^2 \zeta_{HK}; \quad \text{ahol: } \zeta_{HK} \equiv \left[ \frac{1}{0.6 + 0.4 (A_2/A_1)^2} - 1 \right]^2; \quad (17.29)$$

A (17.23)-ból, az  $A_2 = A_1$  esetben nulla veszteségtényezőt kapunk – ennek így is kell lennie, hiszen ekkor nincs hirtelen keresztmetszet csökkenés. A keresztmetszet viszony növekedésével a veszteség tényező növekszik, az értéke kb. 0.444-hez tart, miközben az  $A_1/A_2$  viszony tart a végtelenhez.

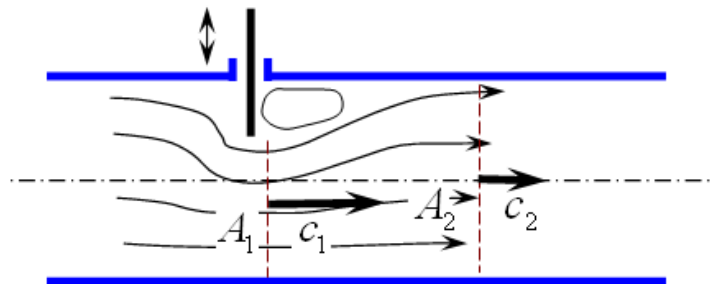
Hangsúlyozzuk, hogy a (17.23)-ban definiált, tapasztalati alapú veszteség-tényező csak közelítés, érvényessége korlátozott.

A hirtelen keresztmetszet csökkenésben fellépő veszteség nyilván nagyobb, mint a fokozatos keresztmetszet csökkenésben létrejövő nyomás veszteség. Rendeljük a 17.8. ábra szerinti „1”-es keresztmetszethez a  $d_1$  átmérőt és értelemszerűen legyen a „2”-es keresztmetszetenél az átmérő  $d_2$ . A nyomásvesztés tényezőt az alábbi módon közelíthetjük:

$$\Delta p'_K = \frac{\rho}{2} c_2^2 \zeta_K; \quad \text{ahol: } \zeta_K = 0.02 \div 0.05;$$

## 17.4 Szelepek, tolózárak, csappantyúk nyomásvesztése

A szelepek, tolózárak és csappantyúk (illetve ez ezekhez hasonló egyéb szerelvények) veszteségei a Borda-Carnot veszteségre vezethetők vissza, hiszen ezekben a szerkezetekben az áramlási keresztmetszet csökkenése után, rendszerint – a szerkezeti kialakítás és a nyitottság függvényében – hirtelen keresztmetszet növekedés áll elő.



17.9. ábra – Tolózárban kialakuló, áramkép vázlata

Legyen a vizsgált szerkezet esetében a lecsökkentett keresztmetszet  $A_1$  és legyen az itt érvényes átlag sebesség  $c_1$ ; legyen továbbá a tovább-áramlás (tehát az általában hirtelen megnövekedett) keresztmetszet  $A_2$  és az itteni átlag sebesség  $c_2$ . Írjuk fel a nyomásvesztéget, a Borda-Carnot veszteségből kiindulva:

$$\Delta p'_{SZ} = \frac{\rho}{2} (c_1 - c_2)^2 + \Delta p'_{EGYÉB} = \frac{\rho}{2} c_2^2 \zeta_{SZ};$$

$$\text{ahol: } \zeta_{SZ} = \left( \frac{c_1}{c_2} - 1 \right)^2 + \frac{2\Delta p'_{EGYÉB}}{\rho c_2^2} = \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 + \frac{2\Delta p'_{EGYÉB}}{\rho c_2^2}; \quad (17.30)$$

A kifejezésben szerepel a  $\Delta p'_{EGYÉB}$  - egyéb nyomásvesztés is, mivel ezekben a szerelvényekben nem kizárólag a hirtelen keresztmetszet növekedés okoz veszteséget – jóllehet a hirtelen keresztmetszet növekedés okozta veszteséget az esetek döntő többségében mértékadónak tekinthetjük. Létezik azonban olyan elzáró-nyitó szerkezet is, amelynél az egyéb veszteségek is jelentősek. Egy-egy konkrét esetben, a tényleges szerkezet jellemzőit kell megismerni és alkalmazni.

A (17.30) alakilag (17.20)-ra hasonlít. Az un. rövid elemek esetére egyébként szintén ilyen alakú kifejezéseket írunk majd fel, mindössze a veszteség tényező tartalma lesz más.

A szelepek, tolózárak és csappantyúk esetén a keresztmetszet viszony – ami igen gyakran döntő mértékben határozza meg a veszteség tényezőt – a zárás-nyitás függvényében változik. Teljesen nyitott állapotban, jó áramlási kialakítás esetén (pl. gömbcsap, nyitva) ez a veszteség tényező nagyon kicsi, akár elhanyagolható is lehet. A másik véglet a teljesen elzárt állapot, amikor is a veszteség tényező értéke végtelen nagyra tekintendő.

A csővezetékben, a szerelvények előtt valamilyen (statikus) nyomás uralkodik. A szerelvény után általában az előbbtől alacsonyabb nyomás alakul ki. A szerelvényen áthaladó közeg a (statikus) nyomásából pont annyit veszít, amekkora a fent említett nyomáskülönbség. Másképpen fogalmazva a szerelvényen áthaladó közeg sebessége akkora lesz, amekkora sebesség esetén, az adott veszteség tényezővel számolva éppen az előírt nyomáscsökkenés következik be. Ezért, ha a szerelvényt zárjuk és ezzel a veszteség tényezőt növeljük, akkor egyúttal a közeg sebességét csökkentjük. Ez a zárás (ellenkező értelemben a nyitás) folyamata, illetve így szabályozható az áramló közeg mennyisége (térfogat- vagy tömeg-árama). Ez a fajta, ugyancsak elterjedt szabályozás alapvetően gazdaságtalan, hiszen a szabályozás során a közeg energia tartalmának egy része hasznosíthatatlan módon alakul hővé.

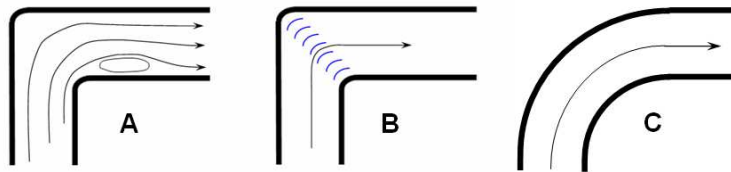
## 17.5 Nyomásvesztés csőkönyökökben és ívdarabokban

Az eddig bemutatott veszteségek lényegében két okra vezethetők vissza. Az egyik ok a falakon fellépő súrlódás – emiatt a közeg energiájának egy része hővé alakul. A másik ok a leválás, a közeg energiájának egy része ekkor is hővé alakul, de itt a súrlódásos hőképződés a közeg belsejében megy végbe. Leválást láttuk akár a Borda-Carnot veszteségnél, akár a hirtelen keresztmetszet csökkenésnél és más esetekben is.

Az iránytörésre (hirtelen irányváltozásra) kényszerített áramlás általában leválást és ezzel, végső soron nyomásvesztést okoz. Ez nyilvánvalóan kerülendő, olyan szerkezetet célszerű kialakítani, ahol a nyomásvesztések a lehető legkisebbek.

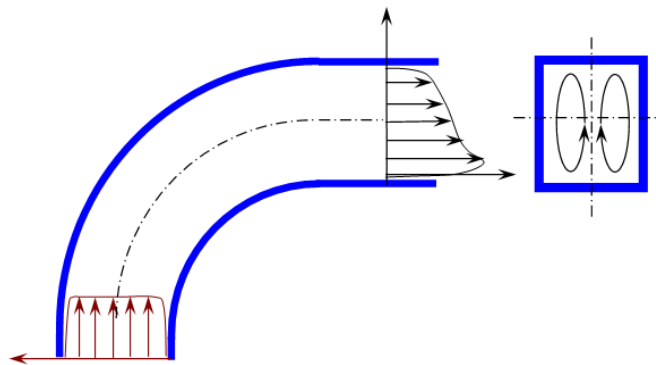
A fentiekre példa a 17.10. ábrán látható három, 90 fokos iránytörés –könyök – kialakítás. Az „A” esetben az ábrázolt módon leválás következik be, amely elkerülhető, ha vagy terelő lapátokat alkalmazunk („B” eset), vagy a könyök helyett nagyobb lekerekítési sugarat alkalmazunk („C”

eset). Ennek megfelelően egy-egy csőkönyök, illetve ívdarab (akár nem 90-fokos is) vesztesége nagymértékben függ a szerkezet geometriájától.



17.10. ábra – Csőkönyök kialakítások

A 17.11. ábrán egy ívdarab látható. Feltesszük, hogy a belépésnél a sebesség a határréteg kívül lényegében állandó – illetve így hasonló lehet a 17.1 alpont végén adott valamely sebesség-eloszláshoz. Az ívdarabban a közeg részecskéi közelítőleg körpályán mozognak, közben elfordulnak. A perdület megmaradásának értelmében létrejön egy, ezt a forgást ellentételező forgás – így alakul ki a kilépő sebesség eloszlás.



17.11. ábra – Ívdarabban kialakuló másodlagos áramlások

A perdület megmaradást egyébként az örvény-tételek írják le. A Kelvin tétel értelmében (a megfelelő feltételek az áramlástan jegyzet 10. fejezetében, a (10.6) képlethez kapcsolódóan olvashatók) a cirkuláció értéke az időben állandó. Itt ugyan valóságos közeg áramlik, de, feltételezve, hogy a Kelvin tétel közelítőleg azért itt is érvényes, belátható, hogy az ívdarabon áthaladó, cirkulációt (perdületet) kapó közeg erre a hatásra ellen-cirkulációval válaszol. A sebességkép fenti alakulása tehát – kissé formálisabban – így is magyarázható.

A 17.11. ábra jobb oldali rész-ábráján a 16.5 ábrához hasonló áramkép alakul ki. Az áramkép hasonlóságának oka a fizikai hatások (köráramlás és határréteg együttese) hasonlósága.

A fentiekben vázolt, másodlagos áramlások a közeg a saját energiájából jönnek létre, és a súrlódás hatására, tehát viszonylag nagyobb távolság megtétele után szűnnek meg. Ez a csőkönyökben, illetve ívdarabban keletkező veszteség fizikai magyarázata. A veszteség számítása a már többször alkalmazott alakú kifejezéssel lehetséges:

$$\Delta p'_k = \frac{\rho}{2} c_2^2 \zeta_{IV}; \quad (17.31)$$

Itt csak a figyelmet hívhatjuk fel arra, hogy amennyiben egy vezetékben különböző csőszerelvények követik egymást, akkor ezek egymásra is hatással lehetnek. A tapasztalat szerint az együttes hatás számítása sok esetben nem igazán lehetséges.



## 17.6. A diffúzor hatásfoka

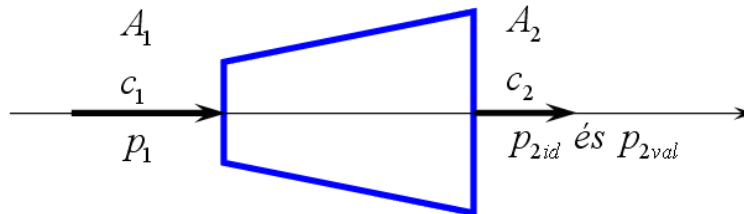
Ebben a pontban a mérsékelt sebességű áramlásokban működő, klasszikus diffúzorral foglalkozunk. A 14.3 alpontban leírt, szuperszonikus diffúzor vizsgálata e jegyzet keretein túlmutat.

A mérsékelt sebességű áramlásokban működő diffúzor (is) egy, egyszerű, áramlástanai gép, a feladata az, hogy a közeg kinetikai energiájának csökkentése révén a statikus nyomást növelje. Mint ilyenek nem egyszerűen a veszteségét, hanem a hatásfokát szokás definiálni:

$$\eta_{diff} = \frac{\Delta p_{val}}{\Delta p_{id}} \quad (17.32)$$

A diffúzoroknak általában létezik egy legjobb kúposága. Ha ennél a kúposágnál jobban tágul a diffúzor, akkor a falai mentén növekvő nyomás ellenében áramló közeg a falakról leválik. A leválással járó örvénylés megnöveli a veszteséget.

Amennyiben a diffúzor kúposága túl kicsi, vagyis kisebb, mint a leválás elkerüléséhez szükséges kúposág, akkor a súrlódási veszteségek rontják a diffúzor hatásfokát. Ennek alapján állítható – amit a gyakorlatban ki is használunk – hogy a diffúzornak van egy olyan kúposága, (általában  $8-10^0$ ) aminél a hatásfoka a legmagasabb értéket veszi fel.



17.12. ábra – Diffúzor

A diffúzoron, ideális közeg átáramlása esetén bekövetkező nyomásnövekedés a Bernoulli egyenlet alapján számítható:

$$p_{2id} - p_1 = \Delta p_{id} = \frac{\rho}{2} (c_1^2 - c_2^2); \quad (17.33)$$

A diffúzoron létrejövő nyomásvesztés tehát:

$$\Delta p'_{diff} = \Delta p_{id} - \Delta p_{val} = (1 - \eta_{diff}) \Delta p_{id} \quad (17.34)$$

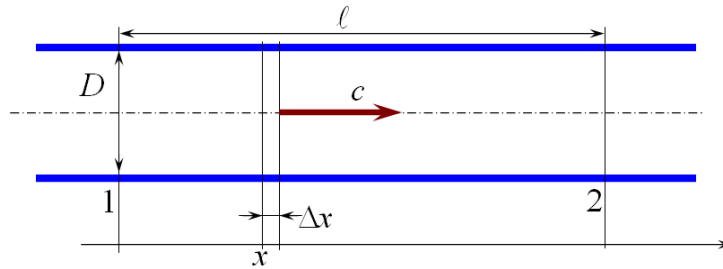
A diffúzor hatásfoka – jó kialakítás esetén 75–80% közötti értéket vehet fel.

## 17.7 Összenyomható közeg kisebbességű áramlása csőben

Bevezető példaként a nagy távolságra történő gáz szállítását említjük: itt nagynyomású gázt szállítanak nagy távolságra. Másik, tipikus példa lehet egy, sűrített levegőt szállító csővezeték. A nagy nyomás egyébként az elektromos áram szállításhoz hasonló, ott a nagy távolságra történő szállítás nagy feszültségen történik. (A feszültség különbség az elektromos áramok tekintetében

ugyanis analóg szerepet játszik, mint a tömegáramok tekintetében a nyomáskülönbség.) A következőkben feltételezzük, hogy a közeg hőmérséklete a szállítás folyamán (pl. a környezettel való hőcsere következtében) nem változik, vagyis a vizsgált áramlás *izotermikus* lesz.

Az ilyen csővezetékben a nyomás az abszolút nyomáshoz viszonyítva jelentősen (pl. több, mint 10%-kal) csökken. Ezzel együtt kell csökkenjen a sűrűség is, hiszen:  $p/\rho = RT = \text{állandó}$ . Ekkor, adott (állandó) tömegáram esetén a sebesség nő. A következőkben a felgyorsításhoz szükséges energiafelhasználást elhanyagoljuk – vagyis stacionárius áramlással számolunk.



17.13. ábra – Csővezeték-szakasz

Feltesszük, hogy a cső átmérője is állandó. Ekkor, az itt kialakuló áramlásban a pozitív „ $x$ ” irányban a nyomás csökkenni fog.

Írjuk fel a 17.13. ábrán látható,  $\Delta x$  hosszúságú szakaszon bekövetkező nyomásesést:

$$\Delta p = -\frac{\rho}{2} c^2 \lambda \frac{\Delta x}{D} \Rightarrow dp = -\frac{\rho}{2} c^2 \lambda \frac{dx}{D}; \quad (17.35)$$

A jobb oldal negatív előjele azt fejezi ki, hogy a nyomás változása valóban nyomásesés! Vegyük figyelembe, hogy a tömegáram segítségével az elemi szakaszon állandó sebesség a következőképpen írható fel:

$$c = \frac{\dot{m}}{\rho(D^2 \pi/4)}; \quad (17.36)$$

Helyettesítsük (17.29)-et (17.28)-ba, illetve figyelembe véve, hogy az általános gáztörvény szerint  $\rho = p/RT$ , írható:

$$dp = -\frac{\dot{m}^2 RT \lambda}{2p(D^2 \pi/4)^2 D} dx \Rightarrow p dp = -\frac{8\dot{m}^2 RT \lambda}{D^5 \pi^2} dx; \quad (17.37)$$

Tegyük fel, hogy a csősúrlódási tényező értéke az teljes  $\ell$  szakaszon állandó, és vegyük figyelembe, hogy kiinduló feltételnek szabtuk a hőmérséklet állandóságát, akkor (17.37) egyszerűen integrálható:

$$\int_{p_1}^{p_2} p dp = -\int_0^\ell \frac{8\dot{m}^2 RT \lambda}{D^5 \pi^2} dx; \quad (17.38)$$

Az integrálás végeredménye:

$$\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} = -\frac{8\dot{m}^2 RT \lambda}{D^5 \pi^2} \ell \Rightarrow \frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \frac{8\dot{m}^2 RT \lambda}{D^5 \pi^2} \ell; \quad (17.39)$$

A (17.39) segítségével egy, a kiinduló feltételeknek megfelelő csőszakaszon történő nyomásesés számítható. Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy néhány, egyszerű átalakítással (17.39) az alábbi formában is felírható:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = p_1 \frac{\rho_1}{2} c_1^2 \lambda \frac{\ell}{D} = p_1 \Delta p'_{INK}; \quad (17.40)$$

A (17.40) tehát azt mondja ki, hogy a kompresszibilis áramlás és az inkompresszibilis áramlás nyomásvesztése a fenti módon kapcsolható össze. Másrésztől (17.40) segítségével esetleg gyorsabban számítható ki a nyomásvesztés, mint (17.39)-cel. Ugyanakkor (17.39) alkalmazásának előnye, hogy több, a csőáramlást leíró fizikai jellemzőt (pl. tömegáram, hőmérséklet stb.) explicit módon kell beírni.

A gyakorlatban előfordulhat, hogy a csőhossz értéke nagyon nagy (pl. gázvezetéknel mondjuk  $10 \div 50$  km) – ekkor a (17.35) helyett a Bernoulli egyenlet differenciál alakjából célszerű kiindulni:

$$d\left(\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2}\right) = -\frac{c^2}{2} \lambda \frac{dx}{D} \Rightarrow \frac{dp}{\rho} + c dc + \frac{c^2}{2} \lambda \frac{dx}{D} = 0; \quad (17.41)$$

Ezek szerint, a nyomás megváltozása mellett a kinetikai energia megváltozását is figyelembe vesszük. Ezt az egyenletet – a modern számítástechnika segítségével – általában numerikusan célszerű megoldani, ehhez célszerű (17.41)-et differenciaegyenletté alakítani:

$$\frac{\Delta p}{\rho} + c \Delta c + \frac{c^2}{2} \lambda \frac{\Delta x}{D} = 0; \quad (17.42)$$

A további számoláshoz szükség van az általános gáztörvényre. Ez azonban, az ilyen nagy nyomásokon az ún. túlösszenyomhatósági tényezőt is tartalmazza:

$$p = \rho R_g T z; \quad \text{ahol: } z = z(p, T); \quad (17.43)$$

$$z = 0.8903 + (6 \cdot 10^6 - p) \cdot 1.9 \cdot 10^{-8} + (T - 290) 1.08 \cdot 10^{-3};$$

A fenti, konkrét túlösszenyomhatósági tényező földgáz szállítása esetén használatos. Más esetekben ettől különböző képletekkel is találkozhatunk.

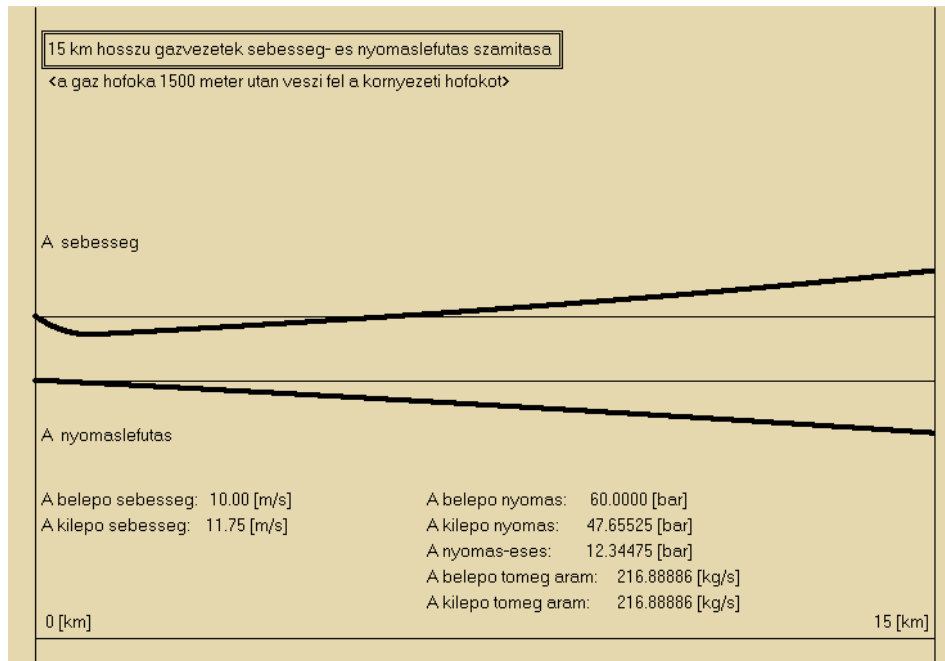
Tekintsük továbbra is konkrét példaként a földgázvezetékek esetét. Ekkor a dinamikai viszkozitás a következőképpen számítható:

$$\mu_g = [10.35 + 0.029(T - 273)] \cdot 10^{-6}; \quad (17.44)$$

A dinamikai viszkozitás értéke azért szükséges, hogy az aktuális Reynolds számot ki tudjuk számítani – ez az érték a csősúrlódási tényező számításához szükséges. A további lépések részletezése nélkül, csak illusztrációként mutatunk be egy példa számítás eredményét – 17.14. ábra.

A 17.14. ábrán nem szerepelnek ékezetes betűk – ez sajnos a számítástechnika egyik, nem igazán jó hozománya. A számítás egy 15 km-es, kereken 0.8 m-es átmérőjű és 0.0038-as relatív érdességű vezetékre vonatkozik.

A belépő sebesség 10 m/s, és a belépő hőmérséklet  $313 \text{ }^{\circ}\text{K}$  ( $40 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Feltettük, hogy a belépő hőmérséklet 1.5 km távolság megtétele után éri el a környezeti hőmérsékletet, ahonnan kezdve már izotermikus lesz az áramlás.



17.14. ábra – Gázvezeték numerikus számítása

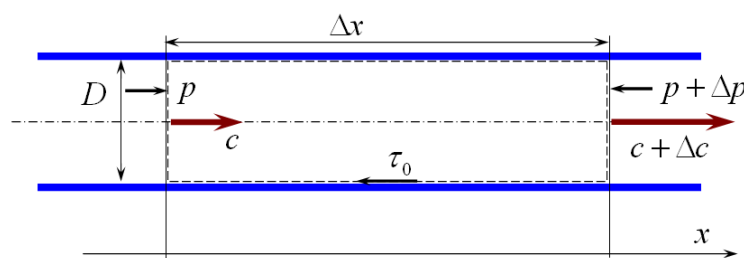
A belépő nyomás 60 bar, ez csökken az áramlás során, a kilépésnél 47.7 bar lesz. Egy esetleges kompresszorral ezt a lecsökkent nyomást kell újra megnövelni.

Érdekes megfigyelni, hogy állandó tömegáram mellett a sebesség a vezeték izotermikus szakaszán szigorúan monoton nő. Ez a nyomás és a vele szorosan kapcsolódó sűrűségcsökkenés miatt van így. A belépő szakaszon egyébként, ahol a hőmérséklet – a hőátadásnak megfelelően – csökken, a sebesség is csökken. Ugyanakkor a nyomás, természetesen az egész hossz mentén szigorúan monoton csökken.

A (17.42)-(17.44) egyenletek (kiegészítve a konkrét csőszűrlődési tényezőt szolgáló egyenletekkel) alapján széleskörűen használható numerikus eljárást lehet felépíteni, ez az eljárás sok, további gyakorlati kérdés megválaszolására is kiterjeszhető.

## 17.8 Összenyomható közeg nagysebességű áramlása csőben

A 17.6 pontban olyan, sűrűlódásos csőáramlást vizsgáltunk, ahol a nyomásváltozás és (esetleg) a sebességváltozás szerepe volt fontos, de az áramlási sebesség mérsékelt maradt. A numerikus példában a Mach szám értéke 0.03 körül változott. Előfordulnak azonban kifejezetten nagysebességű, sűrűlódásos csőáramlások is – ezekkel foglalkozunk ebben a pontban.



17.15. ábra – Ellenőrző felület csővezetékben

A vizsgálatot a megmaradási elvek alapján végezzük. Tekintsük elsőnek az anyagmegmaradás elvét. Egy, állandó keresztmetszetű csőben a folytonosság törvénye az alábbi formában írható fel:

$$\rho c = \text{állandó} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} = 0; \quad (17.45)$$

(Az egyenletet rögtön teljes differenciál alakban is felírtuk.)

Másodszor írjuk fel az energia megmaradás elvét kifejező energia egyenletet – fontos: ekkor a környezettel nincs hőcsere, tehát a vizsgált áramlás *adiabatikus*:

$$c_p T + \frac{c^2}{2} = \text{állandó} \Rightarrow c_p dT + c dc = \frac{\kappa}{\kappa-1} R dT + c dc = 0; \quad (17.46)$$

Harmadszorra a mozgásmennyiség megmaradásán alapuló, impulzus tételt írjuk fel. A 17.15. ábrán alapján az időegységre eső mozgásmennyiség változás (17.47 képlet, felső sor, bal oldal) egyenlő a nyomásváltozásból származó felületi erővel (felső sor, jobb oldal, első és második tag) és a hengerpaláston ébredő, csúsztató feszültségből származó erővel felső sor, jobb oldal, harmadik tag:

$$\begin{aligned} -c\rho c A + (c + \Delta c)\rho c A &= p A - (p + \Delta p) A - \tau_0 (\pi D \Delta x); \\ \rho c dc + dp + \lambda \frac{\rho c^2}{2D} dx &= 0; \end{aligned} \quad (17.47)$$

A (17.47) felírásánál a térfogati erőket elhanyagoltuk, illetve áttértünk a teljes differenciálra. Ennél az áttérésnél felhasználtuk, hogy a fali csúsztató feszültség az alábbi módon írható fel:

$$\frac{D^2 \pi \rho}{4} \frac{c^2 \lambda \ell}{2D} = \tau_0 \pi D \ell \Rightarrow \tau_0 = \lambda \frac{\rho c^2}{8}; \quad (17.48)$$

Határozzuk meg először a csőhossz menti Mach szám eloszlást, az előbbieken bevezetett, (17.45)-(17.48), a megmaradási elveket kifejező egyenletek alapján.

Vegyük figyelembe, hogy:

$$\frac{p}{\rho} = RT \text{ és } a^2 = \kappa \frac{p}{\rho} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = RT = \frac{a^2}{\kappa}; \quad (17.49)$$

Osszuk el (17.47) minden tagját a nyomással és vegyük figyelembe (17.49)-et, ezzel:

$$\kappa M^2 \frac{dc}{c} + \frac{dp}{p} + \kappa \lambda \frac{M^2}{2D} dx = 0; \quad (17.50)$$

Az állapot egyenlet teljes differenciálként is felírható:

$$p = \rho RT \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}; \quad (17.51)$$

A (17.45) folytonossági törvény segítségével küszöböljük ki (17.51)-ből a sűrűséget, úgy, hogy a sebességet írjuk a helyére:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dc}{c} + (\kappa-1) M^2 \frac{dc}{c}; \quad (17.52)$$

Ezt (17.50)-be visszahelyettesítve kapjuk, hogy:

$$(M^2 - 1) \frac{dc}{c} + \kappa \lambda \frac{M^2}{2} \frac{dx}{D} = 0; \quad (17.53)$$

Írjuk fel a Mach számot definiáló egyenletet, kissé más alakban:

$$M = \frac{c}{\sqrt{\kappa R T}};$$

Ezt is felírhatjuk teljes differenciálként:

$$\frac{dM}{M} = \frac{dc}{c} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T}; \quad (17.54)$$

Ezzel, (17.54)-ből (17.46) felhasználásával (úgy, hogy kiküszöböljük belőle a hőmérsékletet) az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{dM}{M} = \frac{dc}{c} \left[ 1 + \frac{(\kappa - 1) M^2}{2} \right]; \quad (17.55)$$

Végül, (17.53)-ből (17.55) segítségével kiküszöbölhetjük a sebességet és eljutunk a számítás alap differenciálegyenletéhez, amelyben független változóként már csak a Mach szám és a helykoordináta szerepel (ezzel ez az egyenlet egyszerűen integrálható lesz):

$$\frac{1 - M^2}{M^3 \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right]} dM = \frac{\kappa \lambda}{2D} dx; \quad (17.56)$$

A (17.56) egyenlet fontos fizikai mondanivalót hordoz. Amennyiben a Mach szám kisebb, mint egy, akkor a Mach szám a cső hossza mentén előrefele (az áramlás irányába) haladva, növekszik ( $dM/dx > 0$ ), hacsak az áramlás fenntarthatóságára vonatkozó feltételek teljesülnek.

Amennyiben viszont az áramlás hangsebesség feletti, azaz a Mach szám értéke nagyobb, mint egy, akkor a Mach szám a cső hossza mentén előrefele (az áramlás irányába) haladva, csökken ( $dM/dx < 0$ ).

Mindkét esetben határ az 1-es Mach szám: a gyorsuló áramlás ezt a Mach számot képes elérni és – a Laval csőnél leírtak értelmében, egyszerű módon – nem képes túllépni. Amennyiben a cső végén a nyomás alacsonyabb lenne, mint ami a hangsebesség eléréséhez legalább szükséges, akkor a cső végszakaszán, itt részletesebben nem vizsgált lökéshullám-rendszer alakul ki.

Hasonló okokból a csökkenő Mach számú áramlás sem képes egyszerű módon egyes Mach szám alá csökkenni – ezt az esetet sem vizsgáljuk itt.

A következőkben (17.56) zárt alakú megoldását kívánjuk megkeresni – ehhez egy egyszerűsítő feltételt kell bevezetni: tegyük fel, hogy a cső hossza mentén a Reynolds szám csak keveset (pl. 10% -ot) változik és ezért a csősúrlódási tényezőt az adott esetre vonatkozó, átlag értékkel ( $\lambda := \tilde{\lambda}$ ) helyettesítjük.

Alakítsuk át (17.56)-ot az alábbi módon:

$$\left\{ \frac{1}{M^3} - \frac{\kappa+1}{2M} + \frac{(\kappa+1)(\kappa-1)M}{4\left(1 + \frac{\kappa-1}{2}M^2\right)} \right\} dM = \frac{\kappa\tilde{\lambda}}{2D} dx; \quad (17.57)$$

Ennek az egyenletnek mindkét oldala integrálható, az eredmény:

$$\frac{-1}{2M^2} - \frac{\kappa+1}{2} \ln M + \frac{\kappa+1}{4} \ln \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right) = \frac{\kappa\tilde{\lambda}}{2D} x + C; \quad (17.58)$$

ahol:  $C$  – integrálási állandó;

Legyen  $x^*$  az a távolság, ahol a Mach szám eléri az egyes értéket.

Az  $x$ -csillag távolsággal (ez a jelölés hasonló a Laval cső legszűkebb keresztmetszeténél alkalmazott jelöléshez), a szakirodalomban javasolt módon meghatározható az integrálási állandó:

$$C = -\frac{\kappa\tilde{\lambda}}{D} x^* - \frac{1}{2} + \frac{\kappa+1}{4} \ln \left( \frac{\kappa+1}{2} \right);$$

Az integrálási állandót visszaírva (17.58)-ba, kapjuk:

$$\frac{\tilde{\lambda}}{D} (x^* - x_M) = \frac{1-M^2}{\kappa M^2} + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \ln \left[ \frac{(\kappa+1)M^2}{2+(\kappa-1)M^2} \right]; \quad (17.59)$$

ahol:  $x_M$  az  $M$  – Mach számnak megfelelő csőhossz.

A fentiek illusztrálására tekintsünk egy, egyszerű példát. A számolásban legyen a csőátmérő paraméter – vagyis az eredményt a csőátmérő függvényében kapjuk majd meg.

Legyen a cső elején a Mach szám értéke 0.2 és legyen a közepes csőszűrlődési tényező ( $\tilde{\lambda}$ ) értéke 0.02. Kérdezzük, hogy (az átmérő függvényében) milyen csőhossznál éri el az áramlás a 0.8-es Mach szám értéket?

A megoldáshoz használjuk ismét a korábban már említett SCILAB program környezetet:

```
//Nagysebességu, surlodasos aramlas csoben
funcprot(0);
//Kiinduló adat
kappa=1.4;

function JOBB=jobb_oldal(kappa,M)
  JOBB=(1-M^2)/(kappa*M^2)+(kappa+1)/(2*kappa)*log((kappa+1)*M^2/(2+(kappa-1)*M^2))
endfunction

disp(jobb_oldal(1.4,0.2),'A csöhossz/atmero 0.2-tol 1-es Mach szamig:');
disp('-----');
disp(jobb_oldal(1.4,0.8),'A csöhossz/atmero 0.8-tol 1-es Mach szamig:');
```

A számítás első lépésében az alább olvasható eredményeket kaptuk:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(x^* - x_{0.2}) &= 14.53 \Rightarrow \frac{x^* - x_{0.2}}{D} = 14.53 / \tilde{\lambda} = 726.5; \\ \tilde{\lambda}(x^* - x_{0.8}) &= 0.073 \Rightarrow \frac{x^* - x_{0.2}}{D} = 0.073 / \tilde{\lambda} = 3.65;\end{aligned}$$

Ezek az eredmények azt jelzik, hogy mekkora az a csőhossz, amely a 0.2-es Mach számtól az 1-es Mach szám (felső sor) és a 0.8-es Mach számtól az 1-es Mach szám (alsó sor) eléréséig tart. Nyilvánvalóan az eredeti kérdésre a válasz a két mennyiség ismeretében:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(x_{0.8} - x_{0.2}) &= \tilde{\lambda}(x^* - x_{0.2}) - \tilde{\lambda}(x^* - x_{0.8}) = 14.53 - 0.073 \cong 14.46; \\ \text{ezzel: } \Rightarrow \frac{x_{0.8} - x_{0.2}}{D} &= 14.46 / \tilde{\lambda} = 723;\end{aligned}$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy a feladat feltételeinek megfelelő esetben az áramlás a 0.2-től 0.8-ig növekvő Mach számot az átmérő 723-szoros hosszúságú szakaszán éri el.

A példából (is) megállapítható, hogy a Mach szám növekedése a cső elején, kis Mach számoknál lassú, a nagyobb Mach számok felé haladva pedig egyre rohamosabb.

Csak utalunk arra, hogy a szemléltető példához hasonló feladat megoldása adott Mach szám esetén igen egyszerű. Ellenkező értelemben viszont – amikor a Mach szám hosszúság szerinti változására vonatkozik a kérdés – kicsit nehezkesebb a megoldás.

A következő lépésben határozzuk meg a nyomás változását, szintén a Mach szám függvényében. Induljunk ki a (17.52) egyenletből és vegyük tekintetbe (17.55)-öt is, akkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dM}{M} \left[ \frac{1 + (\kappa - 1)M^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2}M^2} \right]; \quad (17.60)$$

Vizsgáljuk a  $dp/dM$  deriváltat. A szögletes zárójelbeli szám mindig pozitív. Ebből megállapítható, hogy a nyomásváltozás és a Mach szám változásának előjele ellentétes: ha a Mach szám nő, a nyomás csökken, és ha a Mach szám csökken, akkor a nyomás növekszik. Például, csökkenő nyomás, tehát gyorsuló áramlás esetén a nyomáscsökkenés fedezi a gyorsuláshoz és a csúsztató feszültség legyőzéséhez szükséges munkát.

Az integráláshoz alakítsuk át (17.53) jobb oldalát:

$$\frac{dp}{p} = \left[ -\frac{1}{M} - \frac{\frac{\kappa - 1}{2}M}{1 + \frac{\kappa - 1}{2}M^2} \right] dM; \quad (17.61)$$

Mindkét oldalt integrálva kapjuk, hogy:

$$\ln p = -\ln M - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right) + C; \quad (17.62)$$



Az integrálási állandót – az előző esethez hasonlóan – válasszuk az alábbi módon:

$$C = \ln p^* + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \right);$$

legyen  $p = p^*$ , az  $M = 1$ -nél.

Vagyis az integrálási állandót úgy választottuk meg, hogy az  $M=1$ -nél érvényes, korábban kritikusként nevezett nyomást adjuk meg. Így kaptuk (17.62)-ből az integrálási állandót.

Végeredményben a nyomás, mint a Mach szám függvénye, a következőképpen írható:

$$\frac{p_M}{p^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2 + (\kappa - 1)M^2}}; \quad (17.63)$$

A Mach szám és a csőhossz vizsgálatánál bevezetett, igen egyszerű feladatot folytatva kiszámítható a következő két nyomásviszony:

$$\frac{p_{0.2}}{p^*} \approx 5.46, \quad \frac{p_{0.8}}{p^*} \approx 1.29, \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{0.8}}{p_{0.2}} = \frac{p_{0.8}}{p^*} \frac{p^*}{p_{0.2}} \approx 0.24;$$

Vagyis, a korábbi példában, miközben a közeg 0.2-ről 0.8-es Mach számra gyorsul, a gyorsulás és a sűrűdés miatt a nyomása kerekén a negyedére csökken.

A feladattal kapcsolatban megjegyzendő, hogy a számítás pontosan akkor helytálló, ha a nyomáscsökkenés éppen a szükséges mértékű. A gyakorlatban több, ettől különböző eset is előfordulhat – tényleges, gyakorlati feladat megoldásakor ezekre a körülményekre oda kell figyelni.

### Izotermikus áramlás csőben

Az előbbieken az adiabatikus esetben létrejövő viszonyokat vizsgáltuk. Ez a feltételezés annál jobb, minél kisebb a hőcseré – például, minél rövidebb a cső, vagy gyorsabb az áramlás.

A gyakorlatban többször előfordul, hogy a közegnek elegendő ideje van a környezettel történő hőcserére, és ezért feltételezhető, hogy a közeg hőmérséklete nem változik – azaz az áramlás izotermikus lesz. Ekkor a (17.44) az alábbi formában írható:

$$p = \rho RT, \quad T = \text{áll.} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho}; \quad (17.64)$$

Ekkor, felhasználva (17.50)-et, illetve figyelembe véve a folytonosság törvénye alapján kapott (17.45)-öt, írhatjuk:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\lambda}{2D} \frac{\kappa M^3}{1 - \kappa M^2}; \quad (17.65)$$

Megállapíthatjuk, hogy ebben az esetben, ha teljesül a  $M < 1/\sqrt{\kappa}$  feltétel (vagyis  $\kappa = 1.4 \Rightarrow 1/\sqrt{\kappa} \approx 0.85$ ), akkor „ $x$ ” növekedésével kb. 0.85-ös Mach számig növekszik a Mach szám. Illetve Ennél nagyobb Mach számok esetében a  $dM/dx < 0$  reláció teljesül, azaz „ $x$ ” növekedésével a Mach szám csökken.

Állandó csőkeresztmetszet és csősúrlódási tényező esetén írható, hogy:

$$dM \frac{1 - \kappa M^2}{\kappa M^3} = \frac{\tilde{\lambda}}{2D} dx \Rightarrow \frac{dM}{\kappa M^3} - \frac{dM}{M} = \frac{\tilde{\lambda}}{2D} dx; \quad (17.66)$$

Integráljuk (17.66) jobb oldali alakjának mindkét oldalát:

$$-\frac{M}{2\kappa M^2} - \ln M = \frac{\tilde{\lambda}}{2D} x + C; \quad (17.67)$$

Az állandó kiszámításához (a korábbi  $x^*$ -hoz hasonlóan) definiáljunk egy segédváltozót: nevezzük  $x_T$ -nek azt a hosszúságot, ahol a Mach szám éppen eléri az  $1/\sqrt{\kappa}$  értéket. Ezzel az állandó értéke:

$$C = -\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right) - \frac{\tilde{\lambda}}{2D} x_T;$$

Ezzel a (17.52)-höz hasonló végeredményre jutunk:

$$\frac{\tilde{\lambda}}{D} (x_T - x_M) = \ln(\kappa M^2) + \frac{1 - \kappa M^2}{\kappa M^2}; \quad (17.68)$$

ahol:  $x_M$  az  $M$  – Mach számnak megfelelő csőhossz.

A nyomás Mach számtól való függését szintén a korábbihoz hasonló – de természetesen egyszerűbb – módon számíthatjuk. A hőmérséklet állandósága miatt a hangsebesség állandó, ezért (17.45)-ből kiindulva, (17.65)-öt figyelembe véve írható, hogy:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dM}{M} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dM}{M}; \quad (17.69)$$

(17.69) harmadik rész kifejezését integrálva kapjuk, hogy:

$$\ln p = -\ln M + C; \quad (17.70)$$

Legyen  $p_T$  a nyomás ott, ahol a Mach szám éppen eléri az  $1/\sqrt{\kappa}$  értéket, akkor a végeredmény:

$$\frac{p_M}{p_T} = \frac{1}{M\sqrt{\kappa}}; \quad (17.71)$$

Ez a képlet (17.63)-hoz hasonló (csak a jobb oldal lényegesen egyszerűbb) – az alkalmazása is az ott tárgyalt példának megfelelően lehetséges.

A feladattal kapcsolatban itt is megjegyzendő, hogy a számítás pontosan akkor helytálló, ha a nyomáscsökkenés éppen a szükséges mértékű.

## Mintafeladat

Ebben, a 17. fejezetben igen sok, fontos anyagrészt van, amelyek elsajátításához külön-külön kell feladatokat, ha csak lehet, önállóan megoldani. Itt egy olyan alap-feladatot mutatunk be, amely feladat (vagy hozzá nagyon hasonló feladatok) a tantárgy számonkérésekor gyakran szerepel. Számos, további, hasonló jellegű példa található a [7] példatár a 15. „Súrlódásos áramlás csőben” c. fejezetében és a 16. „Súrlódásos áramlás testek körül” c. fejezetében.

**Feladat:** meghatározandó a 17.16 ábrán látható csővezetékben kialakuló térfogat-áram és a vízfelszín csőtengelytől mért magassága.

**Megoldás:** a feladat megoldásához szükséges kiinduló adatok a 17.16 ábráról leolvashatók. A megoldás a kiterjesztett Bernoulli egyenlet (17.1) stacionárius áramlásra vonatkozó alakjának segítségével kereshető meg. Írjuk fel ezt az egyenletet először az ábrán is látható „1”-es és „2”-es pont közé:

$$\left(\frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2}\right) + (U_1 - U_2) + \left(\frac{p_1}{\rho_{\text{víz}}} - \frac{p_2}{\rho_{\text{víz}}}\right) = \sum \frac{\Delta p'}{\rho_{\text{víz}}} \quad (17.72)$$

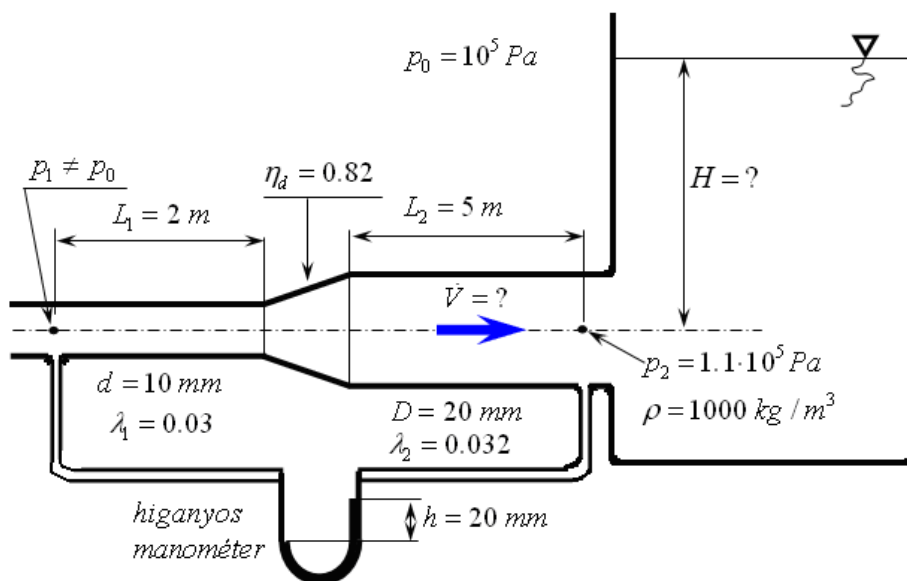
Elemezzük a (17.72) egyenlet egyes tagjait. Tekintsük először a két sebességet. Ezek között a folytonosság törvénye teremt kapcsolatot:

$$c_1 A_1 = c_2 A_2 \quad (\text{mert } \rho_{\text{víz}} = \text{áll.}) \Rightarrow c_1 d^2 = c_2 D^2 \Rightarrow c_1 = 4c_2$$

A két potenciál – feltéve, hogy a két pont egyforma magasságban van – értéke azonos. Ezek egymást kiejtik, a következőkben nem számolunk velük.

Határozzuk meg ezután a statikus nyomások különbségét. Feltesszük, hogy a csőben lévő magasságváltozás hatása elhanyagolható. A 17.16. ábrán látható, „U” csöves nyomásmérő tehát a keresett statikus nyomások különbségét méri. A hidrosztatika fejezetben leírtak szerint számíthatjuk ki ezt a nyomás különbséget:

$$p_1 - p_2 = (\rho_{\text{higany}} - \rho_{\text{víz}}) gh = 12600 \cdot 9.81 \cdot 0.02 \cong 2472 \text{ Pa}$$



17.16. ábra – Súrlódásos áramlás, alapfeladat

Ki kell még számítani az 1-es és 2-es pont közötti, súrlódásból származó nyomás-veszteséget. Ez három részből tevődik össze: az első a kisátmérőjű, egyenes cső nyomásvesztesége, a második a diffúzor nyomásvesztesége és a harmadik a nagyátmérőjű, egyenes cső nyomásvesztesége:

$$\sum \frac{\Delta p'}{\rho} = \lambda_1 \frac{L_1}{d} \frac{c_1^2}{2} + (1 - \eta_d) \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D} \frac{c_2^2}{2}$$

Helyettesítsük be ezeket a részeredményeket a kiterjesztett Bernoulli egyenletbe, és a folytonosság törvényének alapján kapott eredmény szerint küszöböljük ki a  $c_1$  sebességet:

$$\left( \frac{16c_2^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \right) + \left( \frac{p_1 - p_2}{\rho_{\text{víz}}} \right) = \left[ \lambda_1 \frac{L_1}{d} \frac{16c_2^2}{2} + (1 - \eta_d) \frac{16c_2^2 - c_2^2}{2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D} \frac{c_2^2}{2} \right]$$

Ebben az egyenletben már csak a „2”-es pontbeli sebesség az ismeretlen. A kifejezés egyszerűbbé tétele érdekében vezessük be a következő, összefoglaló mennyiséget:

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 \frac{L_1}{d} \frac{16}{2} + (1 - \eta_d) \frac{15}{2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D} \frac{1}{2} = \\ &= 0.03 \cdot \frac{2}{0.01} \frac{16}{2} + (1 - 0.82) \frac{15}{2} + 0.032 \cdot \frac{5}{0.02} \frac{1}{2} = 53.35 \end{aligned}$$

Ezzel:

$$c_2^2 (7.5 - 53.35) = -(2472/1000) \Rightarrow c_2 = 0.232 \text{ m/s}$$

A térfogat-áram pedig:

$$\dot{V} = (D^2 \pi / 4) c_2 = (0.02^2 \pi / 4) \cdot 0.232 = 0.000073 \text{ m}^3/\text{s}$$

A második kérdés a „H” magasság értéke. Ennek számítására ismét a kiterjesztett Bernoulli egyenletet használjuk, de most a „2”-es pont és a „csónakos” (jele: 0) pont közé felírva:

$$\frac{p_2}{\rho_{\text{víz}}} + \frac{c_2^2}{2} = \frac{p_0}{\rho_{\text{víz}}} + U_0 + \sum \frac{\Delta p'}{\rho_{\text{víz}}} = \frac{p_0}{\rho_{\text{víz}}} + g H + \frac{c_2^2}{2}$$

A fenti egyenletben, veszteséggként már csak a kilépési veszteséget kell szerepeltetni. Innen a keresett magasság egyszerűen számítható:

$$H = \frac{p_2 - p_0}{\rho_{\text{víz}} g} = \frac{10000}{1000 \cdot 9.81} \approx 1 \text{ m}$$

Vagyis a csőtorkolat középvonala a szabad vízfelszín alatt, mintegy 1 méteres mélységben helyezkedik el.

## 18. Testek körüli áramlások

A test körüli áramlásnak az olyan áramlást nevezzük, amikor a szóban forgó testet egy elvileg végtelen folyadéktér veszi körül és vagy a folyadék, vagy a test, esetleg mindkettő mozog. Ez utóbbira példa egy repülőgép, amely mozgó levegőben (pl. turbulens atmoszféra) repül.

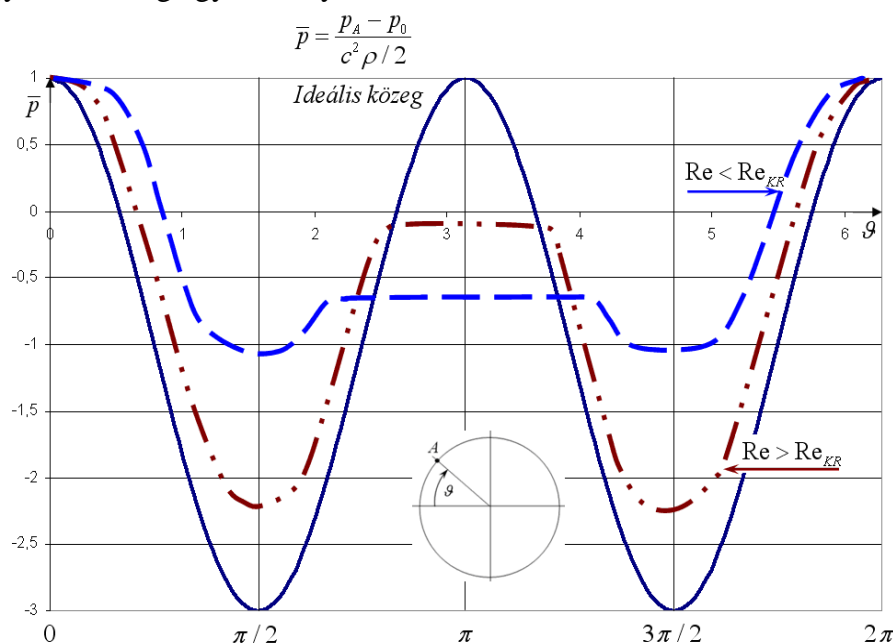
Áramlástan szempontból, számunkra csak az egymáshoz képesti mozgás az érdekes – a következőkben, amint azt a cím is jelzi, úgy tekintjük, hogy a közeg áramlik a test körül. Erre egy gyakorlati példa lehet egy ún. szélcsatorna, ahol a szélcsatornában létrehozott (mesterséges) légáramlásban valamely testet (modellt) vizsgálunk. A testek körül kialakuló áramlás áramképét általában a *testhez kötött rendszerben* vizsgáljuk.

A testek és az áramló közegek között többféle kölcsönhatás is keletkezhet: a mi szempontunkból a legfontosabb az erőhatás és esetenként a hőátadás. Az erőhatások a test felületén jelentkező nyomás- és csúsztató feszültség eloszlás eredményeképpen állnak elő. Ezt a felületi erőt az első részben, a feszültség tenzor segítségével definiáltuk és az (1.3) kifejezéssel írtuk le.

A „test” egy általános kategória – ide sorolhatóak például – sok más között – a járművek is. A testek lehetnek áramvonalasak és nem áramvonalasak. De az áramvonalasság relatív: bizonyos megfúvási (áramlási) irányok esetén a test lehet áramvonalas, más megfúvási irányok esetén pedig ugyanaz a test esetleg már nem áramvonalas. A nem áramvonalas testeket esetenként tompa testnek is nevezik.

### 18.1. Tompa testek

Tompának nevezünk egy testet, ha az nem áramvonalas, azaz a közeg a testet csak úgy képes körüláramolni, hogy közben leválások (leválási zónák) keletkeznek. Tipikus példa tompa testre egy épület, egy híd, esetleg egy kémény stb.



18.1. ábra – Henger körüli áramlás nyomáseloszlása

Tompa testek esetében a testre döntő mértékben ellenállás erő hat, amely legnagyobb részben a felületi nyomáseloszlásból származik. Ez azt jelenti, hogy a csúsztató feszültség szerepe ebben az esetben kicsi, néha elhanyagolható. Az ellenállás erő egyébként a testet érő áramlás sebességének egyenesén fekszik, értelme a testhez kötött koordináta rendszerben az áramlási sebesség értelmével megegyező.

A tompa testek közül kiemelten fontos a henger és a gömb. A henger körüli, ideális közeg esetében kialakuló áramlással már korábban foglalkoztunk (9. pont, (9.10) – (9.13) összefüggés). A henger körül ideális és valóságos viszonyok között kialakuló áramlás nyomás-eloszlása – nyomás tényezője – látható a 18.1. ábrán.

A valóságos áramlásban kialakuló nyomástényező eloszlás lényegesen különbözik az ideális közeg esetén alakuló nyomástényező eloszlástól. Ez a különbség első sorban a henger megfúvással ellentétes, hátsó oldalán jelentkezik: a valóságos közeg a hengert nem tudja tökéletesen körüláramolni, a henger mögött örvényes leválási zóna alakul ki.

Az ebben a zónában kialakuló örvényeket Kármán féle örvénysornak nevezik – ezek az áramlástan és aerodinamika számos területén bírnak rendkívül nagy jelentőséggel.

Valóságos közeg henger körüli áramlása esetén, amikor az áramlási sebesség, azaz a Reynolds szám kicsi, a henger körül, a belépő torlópontról induló, lamináris határréteg alakul ki. Ez a határréteg csak kis energiatranszportra képes, ezért hamar leválik. Ez kb.  $\vartheta \approx 80^\circ$  körülfogási szöveget jelent, a leválás kb. itt következik be. Ezután, a fennmaradó ív mentén levált, örvényes zóna áll elő, ahol a nyomás alacsony. Ezt mutatja a 18.1. ábra „ $Re < Re_{KR}$ ”-val jelölt görbéje.

Nagyobb, pontosabban a kritikusnál nagyobb Reynolds szám esetén a lamináris után a turbulens határréteg is létrejön. A turbulens határrétegbeli jelentősen nagyobb energiatranszport jóval későbbi (kb.  $\vartheta \approx 120^\circ$ ) leválást jelent. Emiatt, ebben az esetben a nyomáslefutást jellemző görbe ( $Re > Re_{KR}$ ) sokkal közelebb halad az ideálishoz. Ez azt jelenti, hogy a henger (gömb) ellenállása a kritikus Reynolds szám elérésekor hirtelen lecsökken, hiszen ilyenkor a henger (gömb) mögötti örvényes zóna – ahol a nyomás alacsony, tehát nagy ellenállást kelt – hirtelen szűkebb lesz. Ezzel nyilvánvalóan együtt jár az ellenállás csökkenése is.

Ezt a tényt, hogy ti. a tompa testeknél, turbulens határréteg esetén az áramlás később válik le, ezért az ellenállás kisebb lesz, sok gyakorlati esetben ki is használjuk. Tipikus példa erre a golfabda esete: ennek a felszínét úgy alakítják ki, hogy a határréteg a lehető legkorábban turbulens legyen – ezért az ilyen labda azonos impulzus hatására messzebbre repül (egyes esetekben akár 75%-kal messzebbre), mint egy olyan, amelynek a sima felületén nem alakul ki turbulens határréteg.

A testek körüli áramlások vizsgálatakor sok, érdekes kérdés merül fel. Az egyik ezek közül a nyomás és a csúsztató feszültség eloszlása a test felületén. Az (1.3) kifejezést a szóban forgó test felülete mentén integrálva a testre ható eredő erőt kapjuk:

$$\mathbf{R} = \int_A \mathbf{\Pi} d\mathbf{A} \quad (18.1)$$

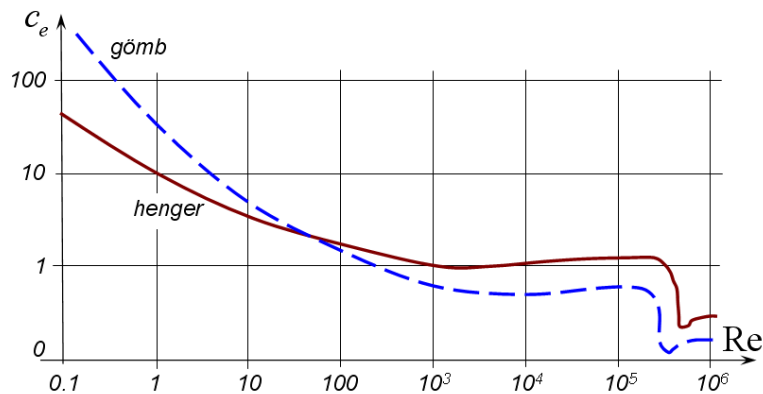
Ennek az erőnek általában két, egymásra merőleges összetevőjét szokás vizsgálni: az egyik a zavartalan áramlás irányába eső ellenállás-erő, a másik az arra merőleges felhajtóerő. Az ellenállás erőt az ellenállás tényező ( $c_e$ ) segítségével szokás felírni.

Az ellenállás tényezőt pl. (szélcsatorna) mérés alapján lehet meghatározni: megmérjük a vizsgált testen keletkező ellenállás erőt, majd ezt az erőt elosztjuk a zavartalan áramlás

sebességével számított dinamikai nyomás és a test áramlásra merőleges, legnagyobb keresztmetszeti felületének ( $A_M$ ) szorzatával:

$$c_e = \frac{F_E}{\frac{\rho}{2} c^2 A_M}; \quad \text{itt: } c_e - \text{az ellenállás tényező} \quad (18.2)$$

A 18.2. ábrán a henger és a gömb ellenállás tényezője látható, a Reynolds szám függvényében. A görbék csak jellegre helyesek, azokról számértéket számolás céljából használni nem szabad. Mindkét görbén látható egy-egy, kritikusnak nevezett Reynolds szám, amelynél az ellenállás tényező értéke hirtelen lecsökken. Ez a már korábban említett, turbulens határreteg megjelenés miatti körülfogási szög növekedés következménye.



18.2. ábra – Henger és gömb ellenállás tényezője

Az ábrán látható görbék összenyomhatatlan közegre vonatkoznak. Nagy sebesség (nagy Mach szám) esetén megjelenik a hullám ellenállás, ami a görbék menetét jelentősen megváltoztatja.

A gömb esetében, teljesen turbulencia-mentes áramlásban ennek a kritikus Reynolds számnak az értéke:  $3.85 \cdot 10^5$ . Ennek a kritikus Reynolds számnak a segítségével szokás a **turbulencia faktort** definiálni:

$$tf = \frac{3.85 \cdot 10^5}{\text{Re}_{krMÉRT}} \quad (18.3)$$

A fenti kifejezés nevezőjében az a kritikus Reynolds szám található, amelyet a minősíteni kívánt áramlásban mérhetünk. Ez legfeljebb egyenlő, de általában kisebb, mint a turbulencia-mentes áramlásban adott érték – ami a tört számlálójában található. A mért kritikus Reynolds szám annál kisebb, minél turbulensebb a vizsgált áramlás. Így, a turbulensség növekedésével a turbulencia faktor értéke is növekszik.

A járművek esetében általában valamilyen értelemben áramvonalas kialakításra igyekeznek. Speciális megfúvási viszonyok esetén ugyan keletkeznek leválások is, de a járművekkel kapcsolatos néhány, bevezető jellemzőt mégis az áramvonalas testek kapcsán ismertetünk.

## 18.2. Áramvonalas testek – a szárnyprofil

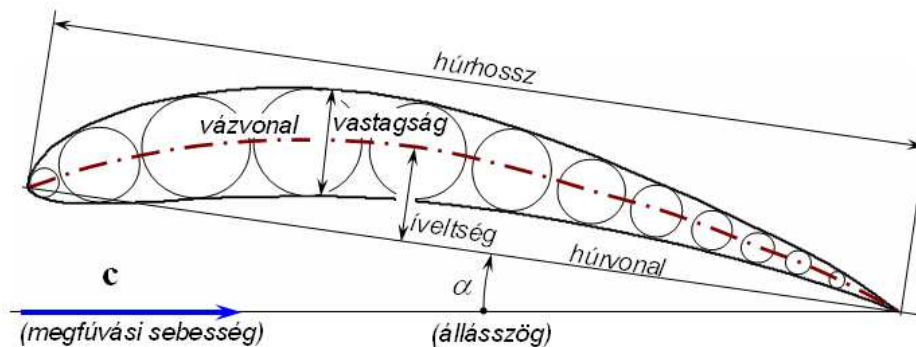
A tompa testek ellentéte az áramvonalas test. A tompa testek körüli áramlásban jellemzően légellenállás jön létre, mely mérsékelt sebességű áramlásban döntően az alakellenállás. Ez az ellenállás alapvetően a nyomáskülönbség miatt áll elő, a csúsztató feszültség szerepe kicsi.

Az áramvonalas testek esetében az alakellenállás általában (amikor a test a tervezett, vagy a tervezetthez közeli irányból kapja a megfűvást) kicsi, e testek ellenállásának döntő része – mérsékelt sebességű áramlásban – a sűrűlási ellenállás. Nagysebességű áramlásban megjelenik a hullámellenállás is, a hullámellenállás alapvetően nyomáskülönbség keletkezése miatt áll elő. Ebben a jegyzetben a hullámellenállással, annak speciális volta miatt nem foglalkozunk.

Az áramvonalas testek esetében, a fentiek miatt, a szakirodalom nyomán az ellenállás tényezőt az áramlás által súrolt felülettel arányos, un. vetületi felülettel ( $A_s$ ) szokás számolni:

$$c_e = \frac{F_E}{\frac{\rho}{2} c^2 A_s}; \text{ itt: } c_e - \text{az ellenállás tényező} \quad (18.4)$$

Az áramvonalas testekre a járműgépészetben legjellemzőbb példa a mérsékelt sebességű áramlásokban alkalmazott szárnyprofil. A szárnyprofil jellemzői a 18.3. ábrán láthatók. A szárnyprofil rendkívül sokféle alkalmazást – a legfontosabb sajátossága az, hogy az áramlás irányába eső ellenálláshoz képest (igen) nagy, az áramlásra merőleges felhajtó erőt hoz létre.



18.3. ábra – Szárnyprofil

Egy áramvonalas testre – pl. szárnyprofilra – ható felhajtó erő mérésrel vagy számítással határozható meg. A felhajtóerő tényezőt az ellenállás tényezőhöz hasonló módon definiáljuk:

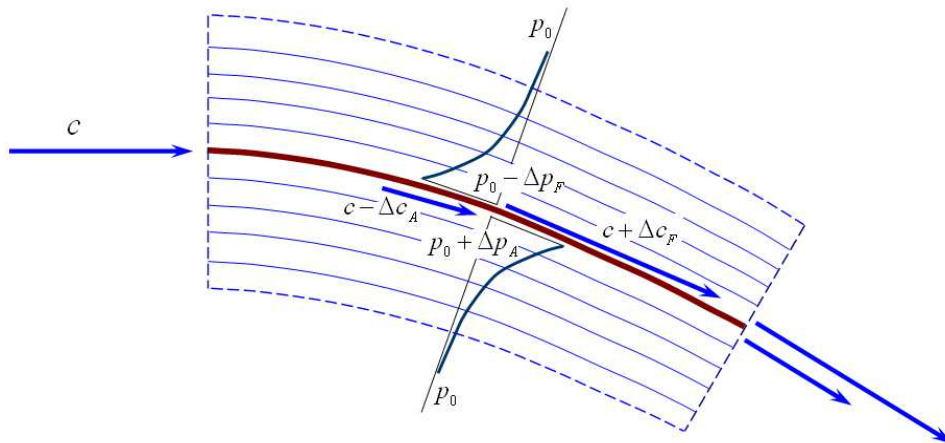
$$c_f = \frac{F_F}{\frac{\rho}{2} c^2 A_s}; \text{ itt: } c_f - \text{a felhajtóerő tényező} \quad (18.5)$$

Az erőtényezők sora tovább folytatható (pl. oldalerő és oldalerő tényező) és a fentihez hasonlóan többféle nyomateki tényezőt is szokás definiálni.

A következőkben a mérsékelt sebességű áramlásban működő szárnyprofilon előálló felhajtóerő keletkezésének folyamatát mutatjuk be. (A nagysebességű, szuperszonikus áramlásban keletkező felhajtó erőről a 14. fejezet 14.3 pontjában már volt szó.)



Helyettesítsük a szárnyprofil a vázvonallával (18.4 ábra). Azt mondhatjuk, hogy a szárnyprofil helyettesítő, ívelt lap a körülötte áramló levegő sebességének irányát változtatja meg. Az irányváltozás, az áramvonalak görbületén keresztül nyomásváltozáshoz vezet. A görbült áramvonalak mentén ugyanis az itt fellépő centrifugális erő hatására a nyomás a görbületi középponttól kifelé haladva növekszik. Így alakul ki a vázvonalt (profil) alatti nyomásnövekedés ( $p_0 + \Delta p_A$ ), amikor a közeg a környezeti nyomásról indulva a vázvonalt alsó részét megnövekedett nyomással éri el. Illetve hasonló módon áll elő a vázvonalt feletti nyomáscsökkenés ( $p_0 - \Delta p_F$ ) is. Azt mondhatjuk, hogy a nyomás a vázvonalt merőlegesen, a görbületi középponttól kifelé haladva majdnem mindig szigorúan monoton nő – csak a vázvonalt helye a kivétel, ahol a nyomás ugrásszerűen csökken. Ez a nyomásugrás – természetesen – csak úgy lehetséges, hogy az áramlást a vázvonalt (profil) szilárd felületként két részre osztja.

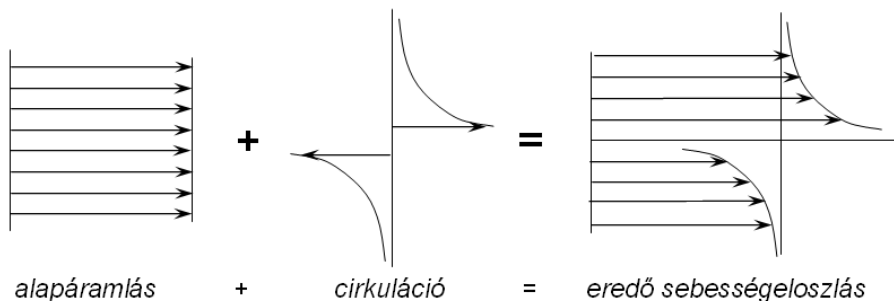


18.4. ábra – A felhajtóerő keletkezésének folyamata

A felső nyomáscsökkenés következtében felül a helyi sebesség megnő; alul, a nyomásnövekedés miatt pedig lecsökken. E nyomáskülönbség alapján előálló sebesség-különbségnek a felhasználásával számítható a cirkuláció, ahol az integrálban használandó zárt görbe a vázvonalt (profil) körülvevő, zárt görbe:

$$\Gamma = \oint \mathbf{c} \, d\mathbf{s}; \quad (2.13)$$

Emiatt, az általában nem nulla cirkuláció – vagy örvény – miatt nevezik a szárnyprofilokból felépített lapátokkal ellátott áramlástani gépeket örvénygépeknek. A profil hatásának cirkulációval történő modellezése – igen nagyvonalúan – a 18.5 ábrán látható.



18.5. ábra – Sebesség szuperpozíció

Az alapáramlás és egy (a gyakorlati számításokban több, esetleg megosztó) örvény sebességterének összege olyan eredő sebességterre vezet, ahol a profilhoz (vázvonalt) hozzá-

közeledve megkapjuk a felső oldali sebességnövekedést és az alsó oldali sebességcsökkenést. Illetve a profiltól (vázvonaltól) távolodva a sebesség a zavartalan áramlás sebességéhez tart, vagyis ekkor a nyomás értéke is tart a környezeti nyomás értékéhez. Az ilyen elven felépített, numerikus modelleket a szakirodalomban felületi örvény-panel módszereknek nevezik, ezeket a profilok egyszerű numerikus számítására (igen elterjedten) használják.

A 18.4. ábrán, a kilépésnél megfigyelhető, hogy a kilépő sebesség ugyan közel érintőleges, azonban a felső oldalról érkező közeg sebessége nagyobb, mint az alsó oldalról érkezőé. Vagyis a profil nyomában egy ún. nyíró-réteg alakul ki. Ebben a rétegben a felső áramlás sebessége fokozatosan csökken, miközben a nyomás növekszik; az alsó áramlás sebessége pedig fokozatosan nő, miközben a nyomás csökken. Ez végeredményben azt okozza, hogy a profil mögötti áramvonal (nyom) tovább görbül lefele. Így alakul ki az a helyzet – amihez hasonló a légsavarnál már bemutattunk – hogy a vázvonaltól (profiltól) távolabbi indukált sebesség kb. kétszer akkora lesz, mint a közvetlenül a vázvonalnál (profilnál) adódó indukált sebesség.

Ebben a nyíró rétegben a jelentős csúsztató feszültség hatására – ahogyan azt a határrétegnél már korábban bemutattuk – jelentős turbulencia is keletkezik.

A profilok legfontosabb tulajdonságaként azt jelöltük meg, hogy ezek kis ellenállás árán nagy felhajtóerőt képesek létrehozni. A (18.4), illetve (18.5) összefüggésekkel definiáltuk az ellenállás, illetve a felhajtóerő tényezőit. E két tényező viszonya számszerűen is megmutatja, hogy a profil „mennyire jó”. Definiáljuk először a siklószámot:

$$\varepsilon = c_e / c_f ; \quad (18.6)$$

A siklószám annál jobb, minél kisebb az értéke. Csak megjegyezzük, hogy a siklószám az elnevezését onnan kapta, hogy megmutatja: egységnyi magasságból milyen távolságra siklik egy (vitorlázó) repülőgép. Vagyis a siklószám korrekt megnevezése mondjuk 1:25. A mindennapokban a kifejezésből az egyes gyakran elmaradt és ekkor mondják – pontatlanul! – hogy a siklószám 25.

Más iskolákban az aerodinamikai jóságot (minőséget) definiálták:

$$K = c_f / c_e = 1 / \varepsilon ; \quad (18.7)$$

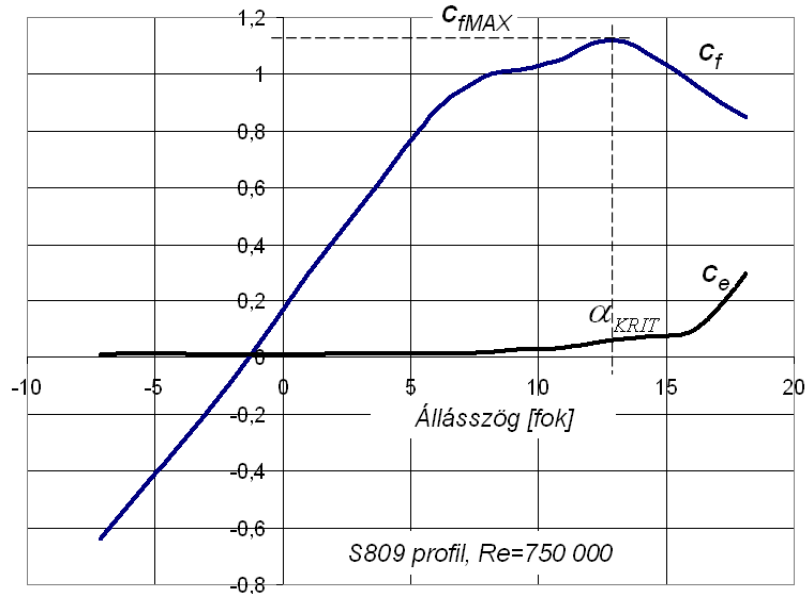
Az aerodinamikai minőség éppen a siklószám reciproka – annyi, mint a pontatlanul megnevezett siklószám (példaként mondtuk a 25-öt). A konkrét siklószám, vagy aerodinamikai minőség érték egy-egy konkrét profil valamely működési állapotában a profiljellemzők ismeretében határozható meg. Nagyon jó profiloknál az aerodinamikai minőség a legjobb üzemállapotban akár 100-120-as értéket is elérhet.

A profilok működését jellemző, legfontosabb változó az állásszög ( $\alpha$ -értelmezése a 18.3. ábrán látható).

A felhajtóerő és az ellenállás tényező az állásszög függvényében a 18.6 ábrán látható. A felhajtóerő tényező sokáig az állásszöggel arányosan változik, majd amikor az értéke túl nagy lesz és az áramlás már nem tudja követni a profil kontúrját (leválás kezdődik), akkor, egy maximális érték után erősen csökkenni kezd. Ezt a maximális felhajtóerő tényezőt éppen a kritikusnak nevezett állásszögnél kapjuk. Az ellenállás tényezőnek van egy minimális értéke, ettől balra és jobbra egyaránt növekszik.

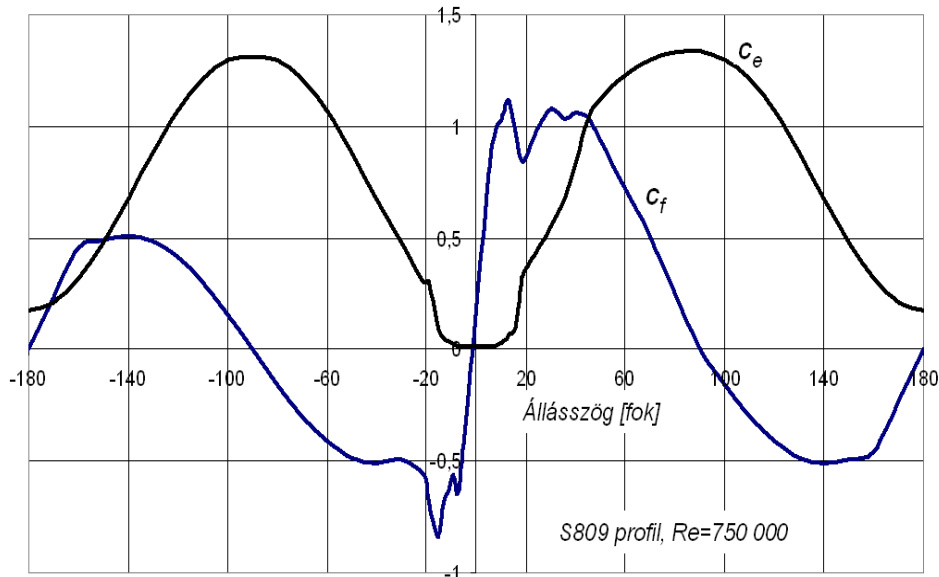
A 18.6 ábrán egy, szélkerekek számára kifejlesztett, S809 elnevezésű profil erőtényezői láthatók. A szélkerekek – amint azt már kifejtettük – viszonylag alacsony sebességeknél, ezért kis

Reynolds számoknál működnek. Ezért számukra speciális profilokat fejlesztenek ki. A felhajtóerő tényező és az ellenállás tényező alapvetően a Reynolds számtól és nagy sebességű áramlások esetén a Mach számtól függ.



18.6. ábra – Felhajtóerő és ellenállás tényező az állásszög függvényében

A 18.6 ábrán egy, meglehetősen kis állásszög tartományt tüntettünk csak fel. Nagyjából ez az állásszög tartomány az, amit pl. a repülésben (általában) használnak. Ezért nagyon sok szárnyprofil esetében csak ilyen tartományban végeznek méréseket. Példának okáért azonban a szélkerekek vagy a helikopter rotorlapátok profiljainak esetében a teljes szögtartomány fontos.



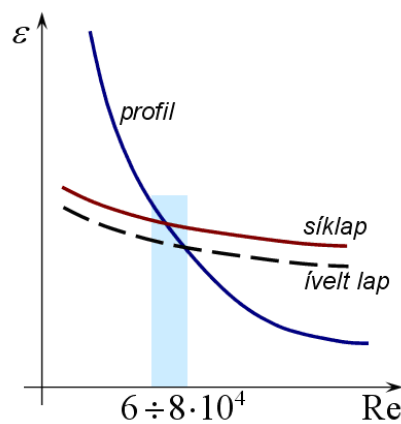
18.7. ábra – Erőtényezők a teljes állásszög tartományban

A 18.7 ábrán ugyancsak az S809-es elnevezésű profil jellemzőit tüntettük fel, de a teljes (-180 – 180 fok) szögtartományban. Az ábráról látható, hogy a felhajtóerő tényező értéke az átesés után akár kissé vissza is növekszik, illetve a megfelelő állásszögeknél (kb. 90 fok felett, illetve kb. -90 fok alatt) előjelet vált. Az ellenállás tényező pedig – éppen az előbb említett előjelváltási

állásszögekénél – igen nagy értéket ér el. A legnagyobb ellenállás tényező a legnagyobb felhajtóerő tényezőnél lényegesen nagyobb. Ilyenkor persze, a profil egyáltalán nem áramvonalas, sokkal inkább az áramlásra merőlegesen álló testként, tompa testnek bizonyul.

A gyakorlatban rendkívül sokféle profil ismert, és napjainkban is egyre újabb profilokat fejlesztenek. E sokféle profilból, például a repülésben ismertek a NACA, az ONERA, a RAF stb. profilok. E profilok adatai az ún. profil-katalógusokban találhatóak meg. (Ilyen pl. a NACA – National Advisory Committee for Aeronautics – 824-es „Report”-ja, amely 1945-ben jelent meg és a „Summary of Airfoil Data” címet viseli).

A legjobb siklószám (melynek értéke annál jobb, minél kisebb) változását a Reynolds szám függvényében, egy profil, ívelt lap és síklap esetében a 18.8. ábra mutatja. Látható, hogy van egy Reynolds szám intervallum, ami alatt célszerűbb síklapot vagy ívelt lapot alkalmazni; illetve efelett a profil alkalmazása előnyösebb.



18.8. ábra – Síklap, ívelt lap és szárnyprofil összehasonlítása

Erre láthatunk példát amikor a kisméretű gépek esetében (pl. processzor-hűtő ventilátor, porszívó járókerék, esetleg kis hűtőventilátor lapát) a lapátot ívelt lapból képezik ki. Nagyobb gépeknél viszont (vastag) profilos lapátokat alkalmaznak.

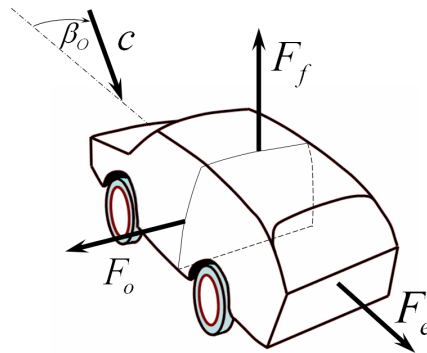
A szárnyprofilok működését kétdimenziós, vagyis síkáramlásban vizsgáltuk. Sok, érdekes, itt nem vizsgálható kérdés merül fel akkor, ha az áramlást három-dimenziósnak kell tekinteni – ilyen pl. a véges szárny problémája. Hasonlóképpen sok fontos és érdekes probléma adódik a nagyobb sebességű, összenyomható áramlásokban. Csak megemlítjük, hogy minden eddigi ismeret időben állandó áramlásra mondtunk ki. Az időben változó áramlásokban keletkező felhajtóerő, ellenállás és nyomaték számítása mind a mai napig komoly nehézségeket okoz.

### 18.3. Járművekre ható közegerők

A járművek több osztályba sorolhatók, ennek megfelelően igen szerteágazó ismeretanyag vonatkozik rájuk. Ebben a jegyzetben csak néhány, egészen egyszerű területtel foglalkozunk.

A 18.9. ábrán egy személyautót tüntettünk fel – az ábrával azonban általánosabb a mondanivalónk: egy járműre, általában hat ellenállás erő ( $F_e$ ), felhajtó erő ( $F_f$ ) és oldalerő ( $F_o$ ) és, természetesen hatnak a megfelelő tengelyek körüli nyomatékok. Ezek szerepe az egyes járműveknél erősen különböző. A repülőgépeknél például minden erő és nyomaték ismerete

szükséges. Ezzel szemben pl. a vasúti járműveknél a légáramlás (szél) következtében keletkező aerodinamikai felhajtó erővel, annak igen kis értéke miatt, senki sem foglalkozik. Mivel mind a hajókkal, mind a repülőekkel foglalkozó szakirányok igen részletesen tárgyalják a speciális áramlástani kérdéseiket, azért itt ezekkel a járművekkel tovább nem foglalkozunk.



18.9. ábra – Gépjárműre ható erők

A megfelelő erőket (rendre ellenállás erő, felhajtó erő és oldalerő) a (18.2) szerint definiált erőtényezőkkel számíthatjuk:

$$F_e = c_e \frac{\rho}{2} c^2 A_M; \quad F_f = c_f \frac{\rho}{2} c^2 A_M; \quad F_o = c_o \frac{\rho}{2} c^2 A_M; \quad (18.8)$$

A (18.8)-ban  $A_M$ -mel jelzett, legnagyobb metszeti felületet – vázlatosan – feltüntettük a 18.9 ábrán: ez a gépjárművet derékban kettészelő felület. Konkrét mérés tanulmányozásakor természetesen oda kell figyelni a ténylegesen alkalmazott mérési feltételekre.

A közegellenállás, pontosabban a minél kisebb közegellenállás minden járműnél igen fontos: a kerékpároknál, a motorkerékpároknál, az autóknál, a vonatknál, a hajóknál, a repülőknél és így tovább. Csökkentésére az áramvonalas formák és a sima felületek, átmenetek alkalmazása a leginkább elterjedt módszer. A személygépkocsik ellenállás tényezője általában  $0.3 \div 1.5$  értékek között változik – a magasabb értékek a kevésbé áramvonalas, régebbi kialakítású személyautókat jellemzik. Az autóbuszok ellenállás tényezője általában  $0.4 \div 0.8$  értékek között változik. A tehergépjárművekre általában a  $0.8 \div 1$  körüli légellenállás tényező jellemző. A kerékpárok légellenállás tényezője változó, nagymértékben függ a kerékpár kerekeinek kialakításától és a kerékpározó személy testtartásától és öltözetétől. A kerékpárok és motorkerékpárok légellenállás tényezője általában  $0.6 \div 0.7$  között változik. Egy mozdony légellenállás tényezője pl.  $0.4 \div 0.6$  körüli érték lehet.

Az oldalerő tényező nagysága esetenként az 1-es értéket is elérheti, és erősen függ az oldaláramlás szögétől. A felhajtóerő tényező értéke általában  $0.1 \div 0.3$  között változik – erősen függ a jármű kialakításától. Egyes, speciális esetekben megfordított szárnyal létrehozott, negatív felhajtóerővel csökkentik az eredő felhajtóerőt. A repülőgépekkel és a hajókkal itt nem foglalkozunk – mindössze megjegyezzük, hogy a hajók esetében a légellenállásnál sokkalta nagyobb és általában fontosabb a víz ellenállása.

A közegellenállás azonban összefügg más erőkkel: az áramvonalas alak akár egészen kis közegellenállást is eredményezhet, de ennek az az ára, hogy ilyenkor a járművön keletkező felhajtóerő megnövekedhet. A személygépjárműveknél például egy első lépésben kialakított, igen áramvonalas kialakítást szokás lerontani addig, hogy az ellenállás még ne legyen túl nagy, miközben a felhajtóerő már nem akkora, hogy jelentősen rontsa a nagy sebességgel haladó jármű úthoz tapadását.

Hasonlóképpen fontos az oldalerő is, amely – a 18.9. ábra szerint – akkor keletkezik, ha a jármű a megfúvást oldalról is kapja. Az ábrán ezt jeleztük a  $\beta$  szöggel. Személygépjárműveknél az oldalerő változása lehet nagyon fontos – pontosabban fontos, hogy a változó megfúvási irány esetén minél kisebb oldalerő változás következzen be. Ez lehet az a helyzet, amikor például oldalszeles úton haladva egy nagy tehergépjármű mellett haladunk el: ilyenkor a szélárnyékba bekerülve és abból kikerülve egyaránt érezhető oldalerő hathat a személygépjárműre. A kerékpárok és motorkerékpárok esetében a helyzet hasonló. A hajók esetében annyit jegyünk meg, hogy ott az oldalszél sodródást okoz.

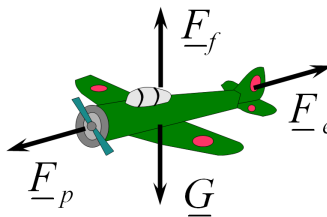
A hajók egyébként azért is érdekes eszközök, mert a mozgásuk két közegben történik, ráadásul a levegő mozgása a vízen hullámokat kelt, amely hullámok is befolyásolják a hajók mozgását. Vagyis a levegő a hajó mozgására közvetlen és közvetett hatással is bír.

A járművek speciális áramlástani kérdéseit napjainkban CFD (numerikus) módszerekkel lehet közelítően vizsgálni, illetve igen gyakori a szélcsatorna, hajók esetében a vízcsatorna kísérlet.

## Mintafeladat

A [7] példatár a 16. „Súrlódásos áramlás testek körül” c. fejezetében több, e fejezet anyagához csatlakozó példa található. A következőkben egy, egyszerű feladatot mutatunk be.

### Feladat:



18.10. ábra – Repülőgépre ható erők

Meghatározandó az ábrán látható motoros kisrepülő-gép felhajtóerő és légellenállás tényezője, valamint síklószáma. A repülőgép szárnyának felülete  $A_s = 18 \text{ m}^2$ ; a repülőgép súlya  $G = 14500 \text{ N}$ ; a repülési sebessége  $c = 60 \text{ m/s}$  és a repüléshez szükséges teljesítmény  $P = 75 \text{ kW}$ .

A számításban a levegő sűrűsége  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$  értékre választható.

**Megoldás:** a mechanikából ismeretes, hogy egyenes vonalú, egyenletes sebességű mozgás esetén a testre – jelen esetben repülőgépre – ható külső erők eredője és az eredő külső nyomaték egyaránt zérus. A nyomatékokkal ebben a feladatban nem foglalkozunk – csak a teljesség kedvéért említettük meg őket. Az erőegyensúlyból következik, hogy a vonóerő ( $\mathbf{F}_p$ ) és a légellenállás ( $\mathbf{F}_e$ ) eredője, valamint a felhajtóerő ( $\mathbf{F}_f$ ) és a súlyerő ( $\mathbf{G}$ ) eredője páronként nulla.

A felhajtóerő abszolút értéke tehát egyenlő a súlyerő abszolút értékével:

$$|\mathbf{F}_f| = |\mathbf{G}| \Rightarrow F_f = 14500 \text{ N}; \quad (18.9)$$

A felhajtóerő ismeretében, (18.5) felhasználásával számítható a felhajtóerő tényező is:

$$c_f = \frac{F_f}{(\rho/2)c^2 A_s} = \frac{14500}{(1.225/2) \cdot 60^2 \cdot 18} = 0.365; \quad (18.10)$$

Másrészt a repüléshez szükséges teljesítmény kifejezése alapján a vonóerő a következőképpen számítható (a vektor jelleget elhagyva, az abszolút értékkel számolunk):

$$P_{SZ} = F_p \cdot c \Rightarrow F_p = P_{SZ}/c = 75000/60 = 1250 \text{ N}; \quad (18.11)$$

Innen következik a légellenállás és (18.4) szerint az ellenállás tényező is:

$$F_p = F_e = 1250 \text{ N}; \quad \text{és} \quad c_e = \frac{F_e}{(\rho/2)c^2 A_s} = \frac{1250}{(1.225/2) \cdot 60^2 \cdot 18} = 0.031;$$

Számítsuk ki (18.6) szerint a siklószámot:

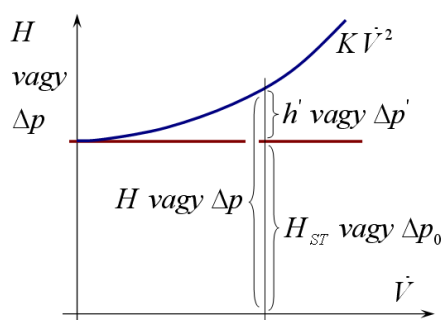
$$\varepsilon = c_e/c_f = 0.031/0.365 = 0.085 \approx 1:11.8;$$

## 19. Áramlástanai gépek - bevezető

Ebben a pontban az áramlástechnikai gépek legelemibb alapismereteit mutatjuk be. Ezek az alapismeretek a járművekkel foglalkozó mérnökök számára feltétlenül szükségesek.

### 19.1. A csővezetékek jelleggörbéje

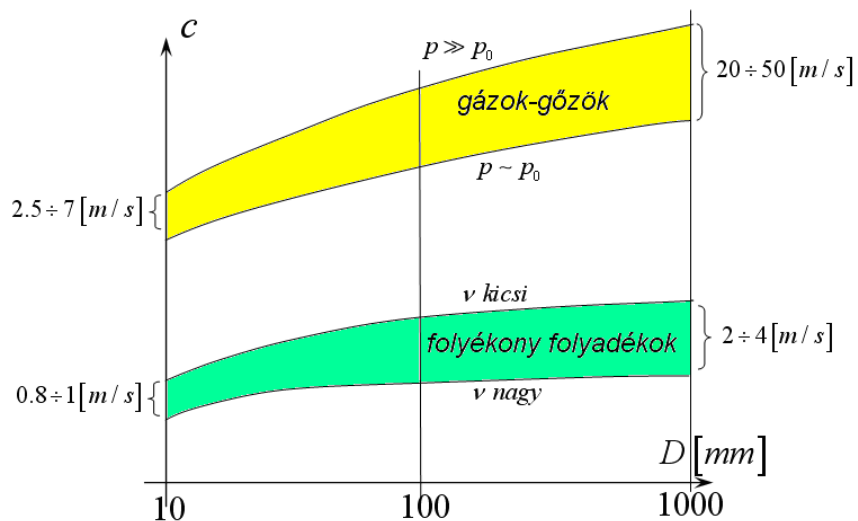
A csővezetékek egyes kérdéseivel a 17. pontban már foglalkoztunk. A csővezetékek, amelyek egyenes csövekből, csőkönyökökből, elzáró szerkezetekből és egyéb elemekből állíthatók össze különféle (folyékony és gáznemű) folyadékok szállítására szolgálnak. Egy ilyen, konkrét csővezeték jelleggörbéje látható a 19.1. ábrán:



19.1. ábra – Csővezeték jelleggörbéje

A csővezeték szállíthat valamely magasságra ( $H$ ), vagy valamely nyomáskülönbség ellenében ( $\Delta p$ ). Ez a szállítás a statikus szállító magasságból ( $H_{ST}$ ), vagy nyomáskülönbségből ( $\Delta p_0$ ), valamint a veszteségből ( $h'$  vagy  $\Delta p'$ ) tevődik össze. Ez utóbbi (a veszteség) a 17. pontban foglaltak szerint, összenyomhatatlan közeget vizsgálva a térfogatáram négyzetével arányos.

Az ilyen jelleggörbével bíró csővezetékekkel kell az egyes áramlástanai gépeknek együttműködni. A gáznemű, illetve folyékony folyadékok szállítására szolgáló csővezetékekben előforduló, jellegzetes sebességeket – a csőátmérő függvényében – mutatja a 19.2. ábra:



19.2. ábra – Csővezetékek jellemző méretei és sebességei



A 19.2. ábra természetesen csak a tájékozódást szolgálja, a gyakorlati megoldásokban ettől eltérő átmérők és eltérő sebességek is léteznek. Mindazonáltal érdekes megfigyelni, hogy az elektromos távvezetékhez hasonlóan a nagyobb távolságra történő szállítás jellemzően nagyobb nyomáson történik. (Az elektromos feszültség-különbség áramlástanai megfelelője a nyomás különbség.)

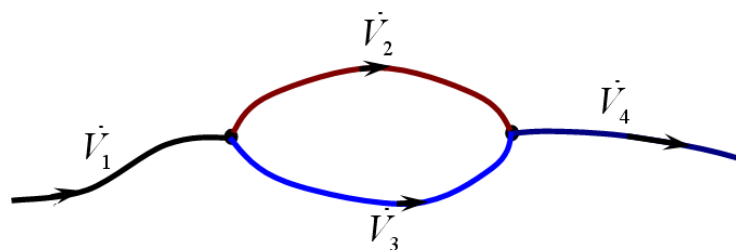
### Csőhálózatok alapismeretei

A csővezetékekből gyakran csőhálózatot állítanak össze. Ezek áramlási viszonyait – ismét elektromos analógiára hivatkozva – a csomóponti és a hurok-törvény alapján írhatjuk le. E törvények általánosan az un. illeszkedési és hurok-mátrix segítségével fogalmazhatók meg; ebben az előadás vázlatban csak nagyon egyszerűen, az elemi szemléletből következő alakjuk található meg.

Tekintsük a 19.3. ábrán látható, egyszerű hálózatot. Erre a hálózatra nézve felírható két csomóponti-egyenlet:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad \text{illetve} \quad \dot{V}_2 + \dot{V}_3 = \dot{V}_4; \quad (19.1)$$

Ezek az egyenletek – a folytonosság törvényét szem előtt tartva – azt fejezik ki, hogy egy csomópontba belépő és kilépő áramok értéke azonos.



19.3. ábra – Egyszerű csőhálózat vázlata

A hurok-törvény pedig azt mondja ki, hogy a 19.3. ábra jelöléseit használva a nyomásvesztés az „2”-es szakaszon egyenlő a „3”-as szakaszon bekövetkező nyomásvesztéssel:

$$\Delta p_2' = \Delta p_3'; \quad (19.2)$$

Általános esetben a csomóponti és hurok-törvények alapján nemlineáris egyenlet rendszert kapunk, ennek megoldása rendszerint valamely, ide vágó numerikus módszer alkalmazását igényli.

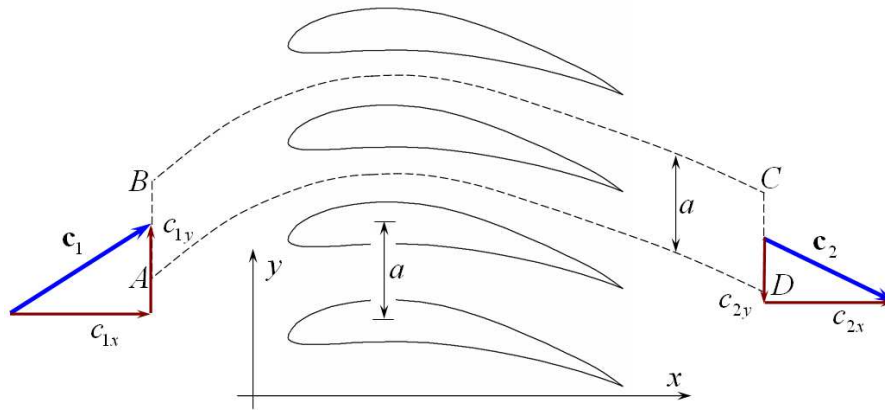
Csőhálózatra vonatkozó, igen egyszerű példa a [7] példatár 15.13-as feladata.

## 19.2. Szárnyrácsra ható erő

Az áramlástanai gépek járókerekeinek (19.5 ábra) lapátjait gyakran vizsgáljuk un. lapátrácsként (19.4. ábra). Ez azt jelenti, hogy a járókerekek egymás után a lapátosztással (19.4. ábra, „a”) következő lapátjait egy, síkon elhelyezkedő lapátrácsra képezzük le. Ehhez a lapátózáshoz érkezik a közeg a  $c_1$  abszolút sebességgel, illetve távozik onnan a  $c_2$  abszolút sebességgel.

Ebben a jegyzetben csak a legegyszerűbb esetet vizsgáljuk, ennek megfelelően tegyük fel, hogy a lapátrács mozdulatlan (vagyis a szállító sebesség nulla). Tegyük fel továbbá, hogy a feladat síkáramlásként vizsgálható, vagyis a 19.4. ábra síkjára merőlegesen semmi sem változik, az ábra síkjára merőleges méret egységnyi lesz.

Tekintsünk két, egymástól pontosan  $a$  (rácstávolság) távolságra lévő áramvonalat, illetve képezzünk ez a két áramvonal egy (a 19.4. ábrán látható módon) áramcsövet.



19.4. ábra – Lapátrács

Zárjuk le ezt az áramcsövet két, lapátosztás-hossznak megfelelő, az ábra szerint „y” irányú szakasszal: ezzel egy ellenőrző felületet kaptunk. Az így kialakított ellenőrző felület lapátosztásonként megismételhető, vagyis amennyiben egy, ilyen rész áramlás viszonyait megismerjük, akkor – mivel itt periodikus ismétlődés következik – az egész síkáramlást is megismertük.

Írjuk fel először a folytonosság törvényét:

$$c_{1x}a = c_{2x}a \quad \text{azaz} \quad c_{1x} = c_{2x}; \quad (19.3)$$

A belépésnél lévő pont az 1-es, a kilépésnél lévő a 2-es jelet kaptam. E két pont közé felírhatjuk az ideális, állandó sűrűségű közegekre vonatkozó, legegyszerűbb alakú Bernoulli egyenletet (12.3 képlet). Itt erőhatás ugyan lesz, de, mivel a rács mozdulatlan, ezért munkavégzés nem történik – így a (12.3) alakú Bernoulli egyenlet felírható:

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2}; \Rightarrow \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_{2x}^2 + c_{2y}^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_{1x}^2 + c_{1y}^2}{2}; \quad (19.4)$$

Rendezzük át (19.4)-et az alábbi módon:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} = \frac{c_{1y}^2 - c_{2y}^2}{2}; \quad (\text{hiszen } c_{1x} = c_{2x}) \quad (19.5)$$

Írjuk fel harmadikként az impulzus tételt is:

$$\begin{aligned} -\dot{m}c_{1x} + \dot{m}c_{2x} &= p_1a - p_2a - T_x; \\ -\dot{m}c_{1y} + \dot{m}c_{2y} &= -T_y; \end{aligned} \quad (19.6)$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a (19.6) második sorában szereplő egyenlet bal oldalának második tagjában azért használtunk pozitív előjelet, mert a választott koordináta rendszerben maga a sebesség összetevő ( $c_{2y}$ ) negatív.

Az impulzus tétel vektor egyenlet, ezért a síkáramlásnak, illetve a választott koordináta rendszernek megfelelően két komponens-egyenletet írtunk fel. Ezek, (19.3) és (19.5) figyelembe vételével átrendezhetők:

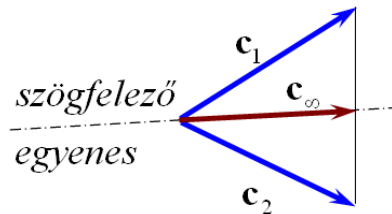
$$\begin{aligned} T_x &= (p_1 - p_2)a = -\rho \frac{c_{1y}^2 - c_{2y}^2}{2} a; & ; \\ T_y &= \dot{m}(c_{1y} - c_{2y}); \quad \text{ahol: } \dot{m} = \rho a c_{1x}; \end{aligned} \quad (19.7)$$

Számítsuk ki a lapátrács vizsgált tagjára ható erő abszolút értékét:

$$|\mathbf{T}| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \rho a \sqrt{\left(\frac{c_{1y}^2 - c_{2y}^2}{2}\right)^2 + c_{1x}^2 (c_{1y} - c_{2y})^2}; \quad (19.8)$$

Vezessük be a végtelen megfúvási sebesség fogalmát: ez a sebesség a be- és kilépő sebességek középértéke:

$$\mathbf{c}_\infty = \frac{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2}{2}; \quad (19.9)$$



19.5. ábra – Végtelen megfúvási sebesség

A végtelen megfúvási sebességet a 19.5. ábrán fel is tüntettük – ennek a sebességnek később, az egyedülálló szárny vizsgálatánál is szerepe lesz. Jelen esetben a végtelen megfúvási sebesség kifejezése a következő módon írható:

$$\mathbf{c}_\infty = \begin{bmatrix} c_{1x} \\ \frac{c_{1y} + c_{2y}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{2x} \\ \frac{c_{1y} + c_{2y}}{2} \end{bmatrix}; \quad (19.10)$$

(19.8)-ból, (19.10) figyelembe vételével, egyszerű számolással következik, hogy:

$$|\mathbf{T}| = \rho a (c_{1y} - c_{2y}) c_\infty; \quad (19.11)$$

Korábban már, a (2.13) egyenlettel definiáltuk a cirkulációt, számítsuk ki ezt a mennyiséget a 19.4 ábrán, az ellenőrző felület kontúrját jelző, szaggatott vonallal rajzolt, zárt görbe mentén, úgy, hogy:

$$\Gamma = \oint \mathbf{c} ds = \int_A^B \mathbf{c} ds + \int_B^C \mathbf{c} ds + \int_C^D \mathbf{c} ds + \int_D^A \mathbf{c} ds; \quad (19.12)$$

A (19.12) második és negyedik tagja kiejti egymást, hiszen az útvonal és a sebesség-eloszlás azonos, de a körüljárási irány éppen ellentétes. Az első és a harmadik tagot egyszerűen számíthatjuk:

$$\Gamma = \int_A^B \mathbf{c} \, ds + \int_C^D \mathbf{c} \, ds = c_{1y} a + (-c_{2y}) a = a(c_{1y} - c_{2y}); \quad (19.13)$$

A számításban figyelembe vettük, hogy az ábra szerint  $c_{2y}$  előjele negatív. Ez egyébként nem jelenti az általánosság megszorítását, mert ha kisebb lenne az irányelterelés és  $c_{2y}$  pozitív lenne, akkor is negatív lenne az előjel, az ellenkező körüljárási irány miatt.

Vegyük észre, hogy a (19.13)-mal adott cirkuláció szerepel (19.11)-ben:

$$|\mathbf{T}| = \rho a (c_{1y} - c_{2y}) c_\infty = \rho \Gamma c_\infty; \quad (19.14)$$

Ezzel megkaptuk a nevezetes Kutta-Zsukovszkij tételt, amely kimondja, hogy a szárnyrácst vizsgálta, *egységnyi hosszúságú* tagján keletkező erő arányos a sűrűséggel, a cirkulációval és a végtelen (zavartalan) áramlás sebességével. A következőkben még megvizsgáljuk a keletkező erő irányát is, mivel (19.14) csak az erő abszolút értékét szolgáltatja.

A (19.7)-ben már meghatároztuk az erő két összetevőjét, ezeknek hányadosa megmutatja az erő „x” tengellyel bezárt szögét:

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\rho a c_{1x} (c_{1y} - c_{2y})}{-\rho \frac{c_{1y}^2 - c_{2y}^2}{2} a} = -\frac{c_{1x}}{\frac{c_{1y} + c_{2y}}{2}} = -\frac{c_{\infty x}}{c_{\infty y}}; \quad (19.15)$$

Eszerint megállapítható, hogy az eredő erő a végtelen megfúvási sebességre merőleges. Ez egyébként azt, a más oldalról is megerősített tény jelzi, hogy az ideális közegben – végtelen szárny, illetve két irányban végtelen szárnyrácst esetén – ellenállás nem keletkezik. A keletkező erő azonosan egyenlő a felhajtó erővel.

Vizsgáljuk meg még az egyedülálló szárny esetét. Ehhez tegyük fel, hogy:

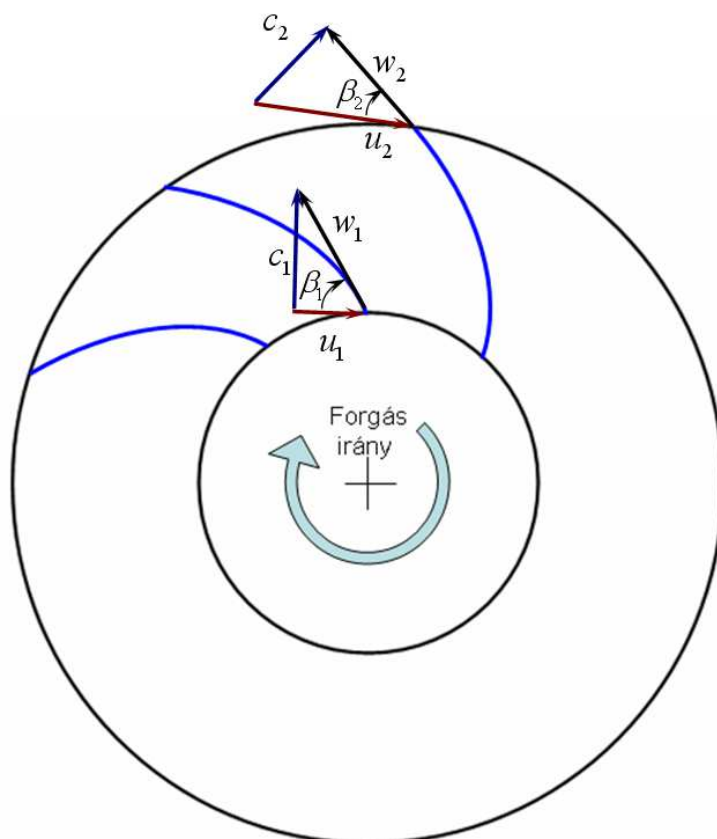
$$a \Rightarrow \infty, \quad \Gamma = a(c_{1y} - c_{2y}) = \text{áll. feltétel mellett}, \quad c_{1y} - c_{2y} \Rightarrow 0, \\ \mathbf{c}_1 \Rightarrow \mathbf{c}_2 \Rightarrow \mathbf{c}_\infty;$$

Egyedülálló szárny esetén tehát a (19.14) képlet ugyanúgy használható, mint szárnyrácst esetében – a  $\Gamma$  ilyenkor az egyedülálló szárny körül keletkező (véges) cirkuláció. A  $\mathbf{c}_\infty$  sebesség pedig abban az értelemben azonos a zavartalan áramlás sebességével, hogy az egyedülálló szárny a körülötte áramló végtelen mennyiségű közeg sebességét csak véges mértékben képes befolyásolni, azaz a szárnytól bármilyen irányban távolodva annak hatása csökken és a sebesség tart a  $\mathbf{c}_\infty$  sebességhez. Kicsit pontatlanul fogalmazva a sebesség a körben, a végtelenben egyenlő  $\mathbf{c}_\infty$ -nel.

### 19.3. Áramlástanai gépek

Az itt következő, erősen bevezető jellegű fejezetben az áramlástechnikai gépek közül csak az örvénygépekkel foglalkozunk. Az örvénygépek elnevezésben az „örvény” nem a forgáson, hanem a gépben található (szárny)lapát körül kialakuló örvényen, másképpen cirkuláción alapul.

Az örvénygépek többnyire (nagyon nagyvonalúan) egy házból (pl. csigaház), járókerékből és a járókereket forgató motorból állnak. Mi, itt a radiális járókereket, azok lapátkialakítását és működését tárgyaljuk. Ezt is a legegyszerűbb módon, a lapátokat vázvonallal helyettesítve tesszük.

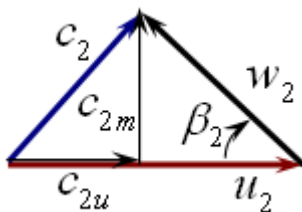


19.6. ábra – Radiális járókerék

A 19.6. ábrán egy hátrahajló lapátosú, radiális átömlésű járókerék látható. A belépést „1”-es, a kilépést „2”-es index jelöli.

A belépésnél feltettük, hogy a belépő közegnek nincs perdülete (cirkulációja), mert a Kelvin tétel értelmében (10.5), ideális, összenyomhatatlan közegben a perdület idő szerinti deriváltja nulla. Ez akkor nincs így, ha a járókerékhez áramló közegnek valami perdületet ad: ilyen lehet, mondjuk a járókerék előtti elő-perdítés.

A 19.6. ábrán egy be- és egy kilépő sebességi háromszög is látható. E két sebességi háromszögben az abszolút sebesség ( $c$ ) – a mechanika tanítása szerint – a szállító sebesség ( $u$ ) és a relatív sebesség vektori ( $w$ ) összegeként áll elő.



19.7 ábra – Járókerék kilépő sebességi háromszöge

A 19.7. ábrán egy, kilépő sebességi háromszög látható. Ebbe a háromszögbe berajzoltuk az abszolút sebesség kerületi ( $c_{2u}$ ) és meridián ( $c_{2m}$ ) összetevőjét, valamint a lapátszöget ( $\beta_2$ ) is. Ezt a sebességi háromszöget és a lapátszöget a 19.6. ábrán is feltüntettük.

Az abszolút sebesség kerületi összetevőjét a perdület, a meridián összetevőjét a térfogat-áram számításakor használjuk majd fel.

A perdület (impulzusnyomatéki) tétel segítségével határozzuk meg egy járókerék forgatásához szükséges nyomatékot:

$$\int_{(A)} \mathbf{r} \times (\mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T d\mathbf{A}) = \int_{(A)} \mathbf{r} \times (\mathbf{\Pi} d\mathbf{A}) + \int_V \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{g} dV) - \mathbf{r} \times \mathbf{T} \quad (7.34)$$

Tegyük fel, hogy a jobb oldal első és második tagja nulla, azaz a felületi erők nyomatéka és a térerősségből származó erők (pl. súlyerő) nyomatéka is nulla. Tegyük fel továbbá, hogy a 19.6. ábrán látható, kétdimenziós esetben a forgatáshoz szükséges nyomaték az ábra síkjára merőleges (vektor) és a baloldalon lévő vektori szorzat ábra síkjára merőleges összetevője [1] nyomán:

$$\int_{(A)} \mathbf{r} \times (\mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T d\mathbf{A}) = (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) \dot{m}$$

Másrészt, szintén a baloldali integrálban megtalálható a tömegáram:

$$\int_A \rho \mathbf{c}^T d\mathbf{A} = \dot{m} \quad (19.16)$$

Ezzel a perdület tétel alapján a járókerékre ható nyomaték számítható:

$$\dot{m} (c_{2u} r_2 - c_{1u} r_1) = (-\mathbf{r} \times \mathbf{T}) \Big|_z = -M_{JK} \quad (19.17)$$

Szorozzuk be mindkét oldalt a szögsebességgel és vegyük a jobb oldal „-1”-szeresét, hogy a folyadékknak átadott teljesítményt ( $P_{FF}$ ) kapjunk:

$$\dot{m} (c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1) = -M_{JK} \omega = P_{FF} \quad (19.18)$$

A folyadékknak átadott teljesítményt a Bernoulli egyenlet alapján is felírhatjuk, hiszen a tömegáram és az energia-különbség szorzata éppen ezt adja:

$$P_{FF} = \dot{m} \left[ \frac{c^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} \right]_1 = \dot{m} g (H_2 - H_1) = \dot{m} g H_{e\infty} \quad (19.19)$$

$$\left( \text{itt: } gH_i = \frac{c_i^2}{2} + gh_i + \frac{p_i}{\rho}, \quad i = 1 \text{ vagy } 2 \right)$$

A fenti egyenletben, a hagyományos felírási módnak megfelelően minden energiát magasság dimenzióban fejeztünk ki, ezért írható a jobb oldalon egyszerűen a magasság különbség. Ez a magasság különbség röviden az „elméleti végtelen szállító magasság”, ami a (19.19) jobb oldalán látható „ $H$ ” betű indexe.

(19.18) és (19.19) összevetésével az Euler turbina egyenletet kapjuk:

$$H_{e\infty} = \frac{c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1}{g} \quad (19.20)$$

Az „Euler turbina egyenletet” egy, a hagyományokon alapuló elnevezés, erő és munka-gépekre egyaránt alkalmazható. (Vagyis nem csak turbinákra, hanem pl. szivattyúkra is érvényes és alkalmazható). Az „elméleti” azt jelenti, hogy ebben az egyenletben veszteségeket nem veszünk figyelembe. A végtelen pedig azt jelenti, hogy a lapátok száma végtelen, azaz a perdület a kerület mentén mindenütt az állandó, elméleti érték.

Ez az egyenlet, más formában axiális ventilátorokra is felírható:

$$\Delta p_{oid} = \rho u \Delta c_u \quad (19.21)$$

A (19.21) annyiban különbözik a (19.20)-tól, hogy a magasság helyett nyomás-dimenzióban íródott; továbbá az axiális gépeknél a ki- és belépő sugár lényegében azonos, így nincs értelme kétféle kerületi sebességgel számolni ( $u_1 = u_2 = u$ ), illetve az abszolút sebességek kerületi irányú összetevőinek különbsége egyetlen tagba foglalható össze ( $c_{2u} - c_{1u} = \Delta c_u$ ).

Az Euler turbina egyenlet más úton is levezethető. Ez a levezetés azért tanulságos, mert a relatív áramlásra felírt Bernoulli egyenlettel történik. Vagyis itt (is) egy olyan esettel találkozhatunk, amikor energia be- vagy elvezetés esetén írjuk fel a Bernoulli egyenletet – de ehhez egy olyan rendszert keresünk (ez a relatív rendszer), ahol erő (nyomaték) van, de az erő irányába eső elmozdulás nincs, és ezzel munkavégzés sincs!

A relatív (a járókerékkel együtt forgó) rendszerre a Bernoulli egyenlet:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 - \frac{r_1^2 \omega^2}{2} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2 - \frac{r_2^2 \omega^2}{2}; \quad (19.22)$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a relatív Bernoulli egyenletben – a forgó rendszer miatt – megjelent a centrifugális erőtér potenciálja is. Rendezzük át ezt az egyenletet úgy, hogy hozzuk be az abszolút sebességeket:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(h_2 - h_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = \frac{c_2^2 + u_2^2 - w_2^2}{2} + \frac{-c_1^2 - u_1^2 + w_1^2}{2}; \quad (19.23)$$

A fenti egyenlet felírásakor figyelembe vettük, hogy  $r_1^2 \omega^2 = u_1^2$ , illetve  $r_2^2 \omega^2 = u_2^2$ . Vegyük tekintetbe továbbá, hogy:

$$\begin{aligned} c_1^2 &= c_{1m}^2 + c_{1u}^2, \quad w_1^2 = w_{1m}^2 + w_{1u}^2, \quad \text{és} \quad w_{1u} = u_1 - c_{1u}, \\ \text{továbbá:} \quad w_{1m} &= c_{1m}, \quad \text{és} \quad -c_{1u}^2 - u_1^2 + (u_1 - c_{1u})^2 = -2u_1 c_{1u}, \\ \text{akkor:} \quad -c_{1m}^2 - c_{1u}^2 - u_1^2 + w_{1m}^2 + w_{1u}^2 &= -2u_1 c_{1u}; \end{aligned}$$

Illetve a fentiekhez hasonló megfontolások alapján, ismét felbontva és behelyettesítve a megfelelő rész összefüggéseket:

$$c_2^2 = c_{2m}^2 + c_{2u}^2, \quad \text{és} \quad c_{2m}^2 + c_{2u}^2 + u_2^2 - w_{2m}^2 - w_{2u}^2 = 2u_2 c_{2u};$$

Ezzel a következő eredményre jutunk:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(h_2 - h_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1;$$

A fenti egyenlet bal oldalát a (19.19) összefüggésnél leírtak szerint átírhatjuk:

$$g H_{e\infty} = c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1; \quad (19.24)$$

Ezzel pedig ismét eljutottunk – más úton – (19.20)-hoz, az Euler turbina egyenlethez.

Az örvénygépek működésére jellemző a reakciófok. Írjuk fel a teljes szállító magasságot a nyomásból és a mozgási energiaváltozásból származó szállító magasságok összegeként:

$$H = H_p + H_c$$

Ezzel a reakciófok:

$$r = \frac{H_p}{H} = \frac{H - H_c}{H} = 1 - \frac{H_c}{H}; \quad \text{itt: } H_c = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} \quad (19.25)$$

A 19.6. és 19.7. ábrán feltüntetett sebességekkel kapcsolatban két, egyszerűsítő megállapítást szokás megfogalmazni: az első, ahogyan az a 19.6. ábrán látható is, az, hogy a belépő közegnek nincs perdülete ( $c_{1u} = 0$ ); a második szerint feltesszük, hogy a járókereket úgy alakítják ki, hogy a meridián sebesség ne változzon ( $c_{1m} = c_{2m}$ ). Ez utóbbi sebesség állandósága úgy érhető el, hogy a járókeréken a folyadék átáramlási keresztmetszetét állandónak tartjuk – vagyis a növekvő sugarak esetében növekvő kerülethez megfelelő mértékben kisebb magasságot rendelünk. Ez a járókerék kialakítás a 19.16. ábrán tekinthető meg. Ez tehát azt jelenti, hogy a járókerék lapát-magassága a sugár növekedésével csökken.

Ezen egyszerűsítésekkel a „ $H_c$ ” szállítómagasság rész az alábbi formában írható fel:

$$H_c = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = \frac{c_{2u}^2 + c_{2m}^2 - c_{1u}^2 - c_{1m}^2}{2g} \cong \frac{c_{2u}^2}{2g} \quad (19.26)$$

Ezzel a reakciófok:

$$r = 1 - \frac{c_{2u}^2}{2c_{2u}u_2}; \quad \text{mert: } H = H_{e\infty} \cong \frac{c_{2u}u_2}{g} \quad (19.27)$$

A radiális járókerekek vizsgálatában az alábbi áttételi számot szokás bevezetni:

$$\xi = c_{2u}/u_2 \quad (19.28)$$

E viszonyszám a lapátózás alakját is jellemzi: hátrahajló a lapát ha  $\xi < 1$  (ez a helyzet a 19.6. ábrán); radiális kilépésű a lapát, ha  $\xi = 1$  ( $c_{2u} = u_2$ ), ilyenkor a relatív sebesség merőleges a kerületi (szállító) sebességre; előrehajló a lapát, ha  $\xi > 1$ . Előrehajló lapát esetén a kilépő abszolút sebesség nagy értéket vesz fel, ilyenkor a kilépésnél nagy a kinetikai energia.

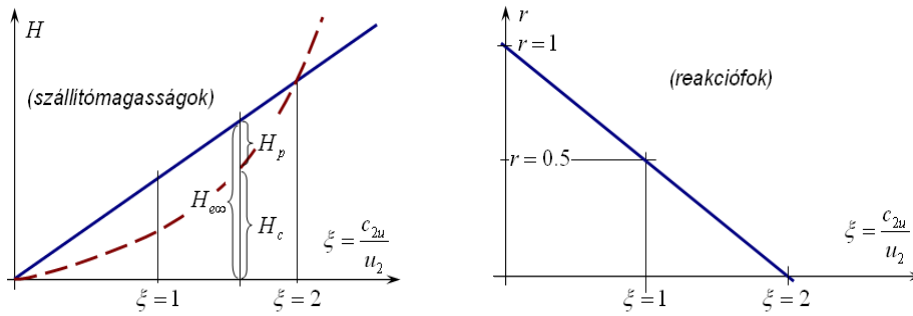
A  $\xi$  segítségével a szállítómagasságok és a reakció-fok a következő formában írható fel:

$$H_{e\infty} = \xi \frac{u_2^2}{g}; \quad H_c = \xi^2 \frac{u_2^2}{2g} \quad \text{és ezzel: } r = 1 - \frac{\xi}{2} \quad (19.29)$$

Ábrázoljuk a szállítómagasságokat, illetve a reakciófokot a sebességi szám függvényében (19.8. ábra). A bal oldali rész-ábráról leolvasható, hogy az elméleti végtelen szállító magasság a



sebességi számmal arányosan nő, a jobb oldali rész ábra pedig megmutatja, hogy ugyanekkor a reakciófok csökken.



**19.8. ábra – A szállítómagasság és a reakciófok a sebességi szám függvényében**

A teljes szállítómagasságon belül a kinetikai energia növekedéséből számított szállítómagasságrész négyzetesen növekszik. Az ábráról leolvasható, hogy a hátrahajló lapátok ( $\xi < 1$ ) esetében a nyomás magasság a nagyobb, mint a ( $H_p > H_c$ ) a kinetikai energia növekedéséből számított szállító magasság rész. Ekkor a reakció fok értéke:  $1 \geq r > 0.5$ .

A radiális lapátoknál ( $\xi = 1$ ) a két szállítómagasság rész éppen egyenlő ( $H_p = H_c$ ), a reakció fok pedig éppen 0.5 – ez jól látható a jobboldali rész-ábrán. Az előrehajló lapátok esetében ( $\xi > 1$ ) a kinetikai energia növekedéséből számított szállító magasság rész kerül túlsúlyba, és ennek megfelelően a reakció fok csökken ( $0.5 > r \geq 0$ ).

Mindkét rész-ábra világosan mutatja, hogy a  $\xi = 2$ -es érték fölé menni igazán célszerűtlen. Végkövetkeztetésként megállapíthatjuk, hogy a hátrahajló lapátózás viszonylag kis szállítómagasságot képes előállítani, de ezt viszonylag jó hatásfokkal teszi – vagyis az ilyen gép méretei (adott feladatra) nagyok lesznek: ezek a stabil, nagyméretű, jó hatásfokú berendezések. Az előrehajló lapátózás esetében viszont éppen viszonylag nagy szállítómagasságot kapunk, de viszonylag rossz hatásfokkal. Az ilyen lapátózással ellátott gépek lehetnek azok a mobil gépek, ahol első sorban a nagy teljesítmény és kis méret a fontos, a hatásfok nem annyira lényeges. Erre példaként a tűzoltó szivattyút említjük.

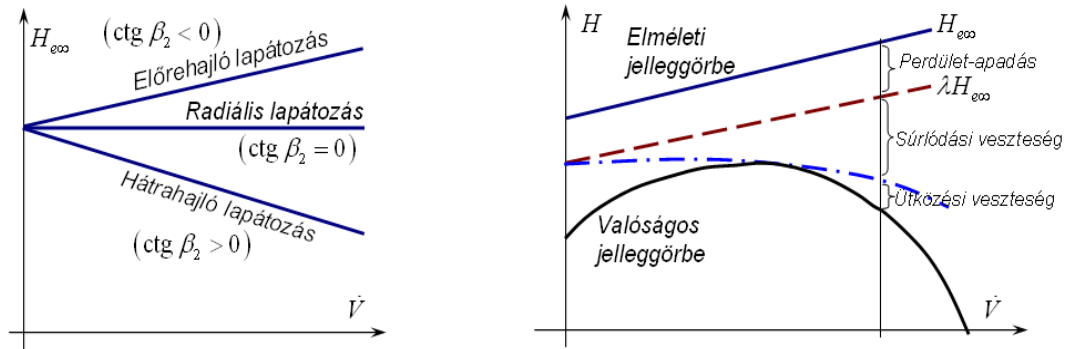
## 19.4 Radiális átömlésű járókerékkel ellátott örvénygépek jelleggörbéje

Jelleggörbének egy, adott fordulatszámhoz tartozó szállítómagasság-térfogatáram (vagy nyomásnövekedés – térfogatáram) diagramot nevezünk. Vizsgáljuk meg először az elméleti jelleggörbéket.

Legyen a ki- és belépő meridián sebesség azonos, illetve legyen a belépés perdületmentes. Ekkor (19.20) megfelelően egyszerűsített alakjából, illetve a 19.7. ábra alapján írhatjuk, hogy:

$$H_{\infty} = \frac{c_{2u} u_2}{g} = \frac{(u_2 - c_{2m} \operatorname{ctg} \beta_2) u_2}{g} = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2}{g} c_{2m} \operatorname{ctg} \beta_2 = K_1 - K_2 \dot{V}$$

A fenti kifejezés felírásánál kihasználtuk, hogy a kilépő meridián sebesség összetevő arányos a térfogatárammal. A kilépő lapátszöveget tartalmazó tag ( $\operatorname{ctg} \beta_2$ ) értéke hátrahajló lapát esetén pozitív, radiális lapátnál nulla és előrehajló lapát esetében negatív. Így az elméleti jelleggörbék felrajzolhatók (19.9. ábra, baloldal):



19.9. ábra – Örvénygépek elméleti jelleggörbéi

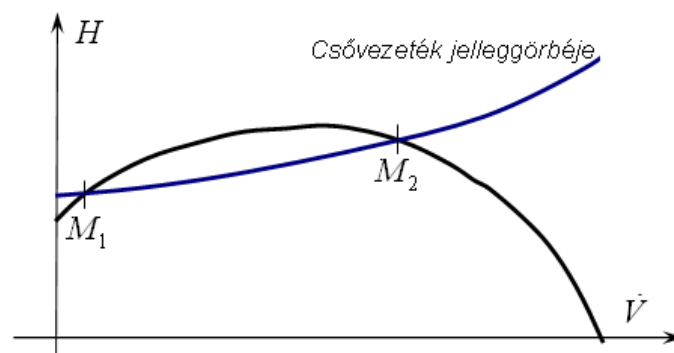
A 19.9. ábra jobb oldalán egy példa látható: hogyan származtatható egy (éppen előrehajló lapátos) gép elméleti jelleggörbéjéből a valóságos jelleggörbe. Az elméleti szállító magasságból le kell vonni a véges lapátszám miatti perdületapadási veszteséget. Ezt követően levonandó a térfogatáram négyzetével arányos sűrítődési veszteség is. Végül levonandó az ütközési veszteség: ennek értéke a tervezési pontban nulla; ennél kisebb vagy nagyobb térfogatáramoknál pedig, a munkaponttól távolodva az értéke nő.

### Csővezeték és radiális átömlésű lapátos géppel ellátott örvénygép együttműködése

Az örvénygépek működési vizsgálatának lezárásaként vizsgáljuk egy csővezeték – radiális átömlésű örvénygép együttműködési kérdését.

A 19.10. ábrán egy radiális átömlésű lapátos géppel ellátott örvénygép és egy csővezeték együttműködését meghatározó jelleggörbék láthatók. A két görbének két metszés-pontja (munkapontja) van. A bal oldali labilis, a jobb oldali stabil.

Ha a térfogat-áram valamely zavar következtében megváltozik és az „ $M_1$ ” munkapontnak megfelelő értéknél nagyobb értéket vesz fel, akkor a rendelkezésre álló szállító magasság nagyobb lesz a szükségesnél, tehát a térfogat-áram tovább növekszik. Ez a jobbik eset. Amennyiben a térfogat-áram lecsökkenne, akkor a rendelkezésre álló szállító magasság kevesebb lesz, mint a szükséges – így a folyadékszállítás lecsökken. Ekkor, rossz esetben hidraulikus lengések is felléphetnek. Ez a munkapont a gyakorlatban elkerülendő!



19.10. ábra Örvénygép és csővezeték együttműködése

Az „ $M_2$ ” munkapont viszont stabil: növekvő térfogat-áram esetén a szükséges szállító magasság nagyobb lesz, mint a rendelkezésre álló, vagyis a térfogat-áram visszacsökken a kiinduló értékre. Ha valamely zavarás folytán a térfogat áram a munkapontbeli érték alá csökkenne, akkor a szükséges szállító magasság kisebb lesz, mint a rendelkezésre álló – ezért a térfogat-áram vissza növekszik a munkapontbeli értékre. Ez a stabil, következésképpen alkalmazandó munkapont.

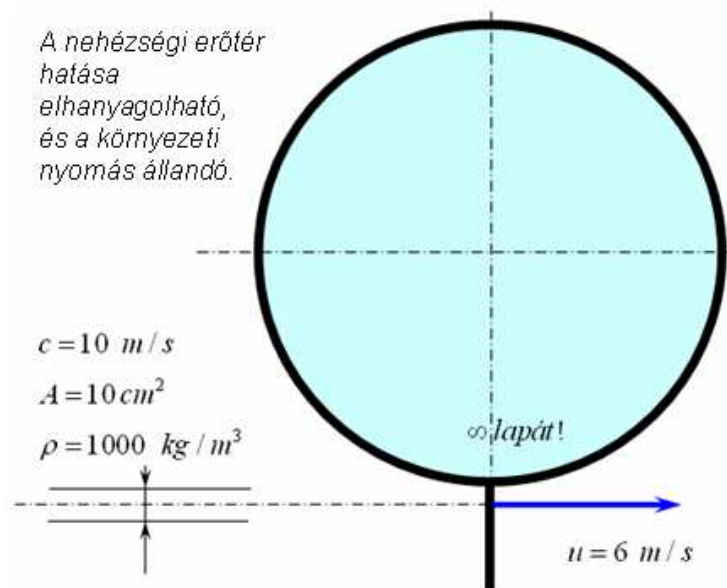
## Mintafeladatok

A [7] példatár 22. „Áramlás- és hőtechnikai gépek” c. fejezetében több, e fejezet anyagához csatlakozó, bár az e tantárgyban megkívánt szinthez képest (túl)magas szintű példa található. A következőkben viszont több, e tárgy szintjéhez illeszkedő feladatot is bemutatunk.

### Feladat:

A 19.11 ábrán egy, „végtelen sok”, radiális (sugárirányú) lapáttal ellátott vízikerék látható. A kerékhez érkező víz-sugár adatai az ábrán láthatóak.

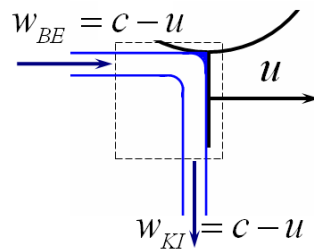
Meghatározandó a vízikerékre ható erő (vektor), a vízikerék elméleti teljesítménye és az a hatásfok, amely megmutatja, hogy ez az elméleti teljesítmény hogyan viszonyul a víz időegység alatt leadott mozgási energiájához.



19.11. ábra - Lapátkerék

**Megoldás:** erre a feladatra szabad az impulzus tétel (7.7) szerinti alakját alkalmazni, mivel, a végtelen sok lapát miatt ez a feladat kvázi-stacionáriusnak tekinthető. A végtelen sok lapát azt jelenti, hogy a lapátoknak van ugyan kerületi sebességük (amellyel mozognak), mégis mindig új és új lapát lép az ábrán vázolt helyre – így a lapátoknak ez a „képe” nem mozdul el – 19.12. ábra:

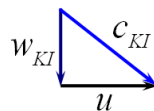
A megoldáshoz tehát egy álló (mozdulatlan) ellenőrző felületet választunk majd – ezelőtt azonban tisztázni kell a sebességi viszonyokat. Ehhez egy, a mozgó lapáthoz rögzített ellenőrző felületet választunk.



19.12. ábra – Relatív ellenőrző felület

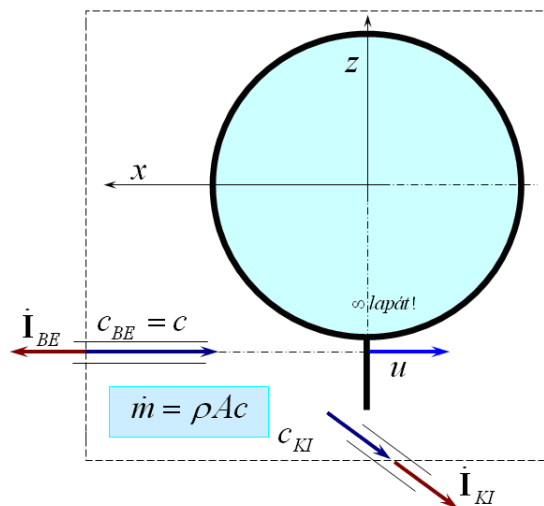
A 19.12. ábrán látható, együtt mozgó ellenőrző felület olyan rendszert jelent, amiben erőhatás van, de elmozdulás nincs – ezért munkavégzés sem történik. Akkor viszont, mivel a nyomás állandónak tekinthető és helyzeti energiaváltozással sem kell számolni, a Bernoulli egyenlet (az energia megmaradás elve) szerint a **ki és belépő relatív sebességek abszolút értéke azonos!**

Ez egy egyszerű, de kihagyhatatlan lépés, illetve jó példa arra is, hogy mire használhatók az un. „relatív” rendszerek. Erő- és munkagépek vizsgálatánál egyaránt szokás a Bernoulli egyenletet a relatív rendszerben felírni és egyes eredményeket innen származtatni. Példa erre az Euler turbina egyenlet ilyen módon történő levezetése (170-171. old.).



19.13. ábra – Kilépő sebességi háromszög

Ezzel már felrajzolhatjuk a feladat megoldásához szükséges, **álló ellenőrző felületet:**



19.14. ábra – Álló ellenőrző felület

Az ábrán, az ellenőrző felület mellett definiáltuk a megoldáshoz feltétlenül szükséges koordináta rendszert ( $x-z$  tengelyek megadásával).

Meghatározhatjuk a tömegáramot ( $\dot{m}$ ), ami a folytonosság törvénye szerint állandó.

Külön felhívjuk a figyelmet a kilépő abszolút sebesség és a kilépő, időegységre eső mozgásmennyiség-változás irányára!

Most már felírható az impulzus tétel erre a feladatra érvényes alakja (hiszen a nyomáseloszlásból származó eredő felületi erő és a térerők hatása, a feladat feltételei szerint nulla):

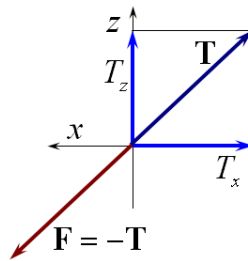
$$\dot{\mathbf{I}}_{BE} + \dot{\mathbf{I}}_{KI} = -\mathbf{T}; \quad (19.30)$$

Írjuk ki részletesen (19.30)-at:

$$\begin{bmatrix} \dot{m} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{m} u \\ 0 \\ -\dot{m}(c-u) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_x \\ -T_y \\ -T_z \end{bmatrix}; \quad (19.31)$$

Ezzel az egyes erő-összetevők számíthatók:

$$\begin{aligned} T_x &= -\dot{m}(c-u) = -1000 \cdot 10 \cdot 0.001 \cdot 4 = -40 \text{ N}; \\ T_y &\equiv 0; \\ T_z &= \dot{m}(c-u) = 1000 \cdot 10 \cdot 0.001 \cdot 4 = 40 \text{ N}; \end{aligned} \quad (19.32)$$



19.15. ábra – A lapátkerékre ható eredő erő

A lapátkerékre ható erő összetevőket külön is és eredő erőként ( $\mathbf{T}$ ) is, a 19.15. ábrán tüntettük fel. Ezen az ábrán látható továbbá a vízre ható eredő erő is ( $\mathbf{F}$ ). A számításból látszik, hogy a  $T_x$  erő-összetevő negatív, ezért az „x”-szel ellentétes az iránya. A  $T_z$  erő-összetevő viszont pozitív, tehát a „z”-vel azonos irányba mutat. A fizikai elvárások szerint éppen ilyen erőnek kell adódnia.

Következő lépésként meghatározandó a vízikerek elméleti teljesítménye:

$$P_{elm} = T_x u = 10 \cdot 6 = 60 \text{ watt}; \quad (19.33)$$

A harmadik kérdés a vízikerek hatásfokára vonatkozik:

$$\eta = \frac{T_x u}{\dot{m} \left[ \frac{c_{BE}^2}{2} - \frac{c_{KI}^2}{2} \right]} = \frac{T_x u}{\dot{m} \left[ \frac{c^2}{2} - \frac{(c-u)^2 + u^2}{2} \right]} = \frac{60}{10(50-26)} = 0.25;$$

Ezzel a kitűzött feladatot megoldottuk.

**Feladat:** vízszállítási feladatra kell járókeréket tervezni; az elméleti végtelen szállítómagasság  $H_{e\infty} = 25 \text{ m}$ , a szállított térfogatáram  $\dot{V} = 600 \text{ lit/perc}$ , a fordulatszám  $n = 1440 \text{ f/p}$ , a belépő átmérő  $D_1 = 0.15 \text{ m}$  kell legyen. Feltesszük, hogy a belépés perdületmentes, a meridián sebesség állandó ( $c_{1m} = \text{áll.} = c_{2m} = 3.5 \text{ m/s}$ ) és a lapátok a kilépésnél sugár-irányúak.

Meghatározandó a  $D_2$ , a járókerék külső átmérője, a  $b_1$  és  $b_2$  lapátmagasság, a reakciófok valamint a járókerék forgatásához elméletileg szükséges teljesítmény.

**Megoldás:** a vizsgálandó járókerék a 19.16. ábrán látható. Határozzuk meg először a külső átmérőnél a kerületi sebességet. Induljunk ki az elméleti végtelen szállítómagasság 19.20 szerinti kifejezéséből:

$$H_{e\infty} = \frac{c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1}{g} \quad \text{itt: } H_{e\infty} = \frac{u_2^2}{g} \quad \text{mert: } c_{1u} = 0 \quad \text{és} \quad c_{2u} = u_2$$

Ezzel a külső átmérőn érvényes kerületi sebesség számítható:

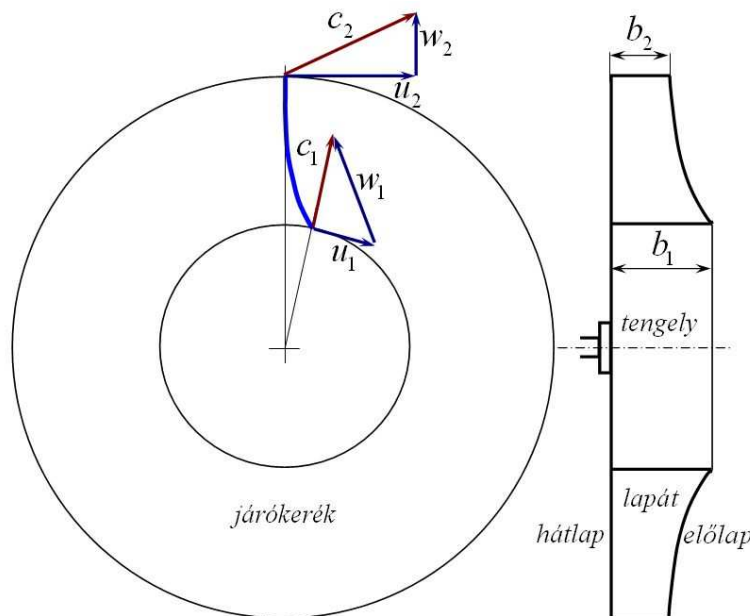
$$u_2 = \sqrt{g H_{e\infty}} = \sqrt{9.81 \cdot 25} = 15.66 \text{ m/s} \quad (19.34)$$

A fordulatszám és a kerületi sebesség ismeretében meghatározható a külső átmérő:

$$D_2 = 2u_2 / \omega = 2 \cdot 9.55 \cdot u_2 / n = 2 \cdot 9.55 \cdot 15.66 / 1440 = 0.208 \text{ m} \quad (19.35)$$

A térfogatáram, és a meridián sebesség ismeretében kiszámítjuk a külső palást-felületet:

$$A_2 = \dot{V} / c_{2m} = (600 \cdot 10^{-3} / 60) / 3.5 = 0.00286 \text{ m}^2 \quad (19.36)$$



19.16. ábra – Járókerék vázlata

A 19.16. ábrán a feladatban szereplő járókerék két nézetének vázlatos rajza látható. Megfigyelhető, hogy a belépő abszolút sebesség ( $c_1$ ) sugárirányú, ez jelenti a perdületmentes belépést.

A lapátozás pedig úgy van kialakítva, hogy a belépő érintő azonos legyen a belépő relatív sebesség ( $w_1$ ) irányával (ütközésmentes belépés a tervezési állapotban).

A lapátmagasság a külső átmérőn:

$$b_2 = A_2 / (\pi D_2) = 0.00286 / 0.0653 = 0.044 \text{ m} = 44 \text{ mm} \quad (19.37)$$

A belépő lapátmagasságot a folytonosság törvénye szerint számíthatjuk:

$$\begin{aligned} b_2 A_2 = b_1 A_1 &\Rightarrow b_2 D_2 = b_1 D_1 \Rightarrow \\ b_1 = b_2 D_2 / D_1 &= 0.044 \cdot 0.208 / 0.15 = 0.061 \text{ m} \end{aligned} \quad (19.38)$$

A reakciófok (19.29) szerint egyszerűen számítható:

$$r = 1 - \frac{\xi}{2}; \quad \xi = \frac{c_{2u}}{u_2} = 1; \quad \text{ezért: } r = 0.5 \quad (19.39)$$

Végül a járókerék forgatásához elméletileg szükséges teljesítményt határozzuk meg. Ez az a teljesítmény, amire a különböző veszteségek ráakódnak – vagyis a valóságban ennél a teljesítménynél akár jelentősen is nagyobb a járókerék működtetéséhez ténylegesen szükséges teljesítmény.

Írjuk fel (19.19) erre az esetre alkalmazott alakját:

$$P_{FF} = \dot{m} g H_{e\infty} = \rho \dot{V} g H_{e\infty} = 1000 \cdot 0.01 \cdot 9.81 \cdot 25 \cong 2453 \text{ watt} \cong 2.5 \text{ kW}$$



## Irodalomjegyzék

- [1] Grúber, J. – Blahó, M.: Folyadékok mechanikája, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1971* (7. kiadás)
- [2] Németh, E.: Hidromechanika, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1963*
- [3] Locjanszkij, L. G.: Folyadékok és gázok mechanikája, *Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956*
- [4] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan I, (J7-724) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1976*
- [5] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan I/2, (J7-724/a) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1976*
- [6] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan II, (J7-725) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1976*
- [7] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan példatár, (J7-1014) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1981*
- [8] Lajos, T.: Az áramlástan alapjai, *Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2004*
- [9] Czibere, T.: Áramlástan, (J14-569) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1971*
- [10] Litvai, E. – Bencze, F.: Folyadékok mechanikája II., (J4-906) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1975*
- [11] Nagy, K.: Elméleti mechanika (VI. fejezet), *Tankönyvkiadó, Budapest, 1985*
- [12] Sasvári, G.: Hidrodinamika, *Atheneum, Budapest, 1925*
- [13] Bohl, W.: Műszaki áramlástan, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983*
- [14] Gisbert, S. – Takó, G.: Numerikus Módszerek 3. (17. fejezet), *ELTE Typo<sub>TEX</sub>, Budapest, 1997*
- [15] Grúber, J. – Szentmártony, T.: Gázdinamika, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1952*
- [16] Pattantyús, Á. G.: Gyakorlati áramlástan, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1959*
- [17] Agroszkin, I.I. – Dimitrijejev, G. T. – Pikalov, F.I.: Hidraulika, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1952*
- [18] Fűzy, O.: Vízgépek, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1966*
- [19] Grúber, J.: (szerk.) Ventilátorok, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968* (2. kiadás)
- [20] Halász, G. - Kristóf, G. – Kullmann, L.: Áramlás csőhálózatokban, *Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002*
- [21] Pachné – Frey, T.: Vektor és tenzoranalízis, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970* (3. kiadás)
- [22] Bronstejn, I.N. – Szemengyajev, K.A. – Musiol, G. – Mühlig, H.: Matematikai kézikönyv  
*Typo<sub>TEX</sub> Kiadó, Budapest, 2000*
- [23] Schade, H.- Kunz, E.: Strömungslehre, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1980